I/ Semestre 1

Analyse et Algèbre 1

(HLMA 101, 45hCM + 45hTD, 10 ects)

Généralités

I/ Bases du raisonnement mathématique ; quelques méthodes de démonstration

II/ Ensembles et applications : notions de base, opérations ensemblistes, injectivité, surjectivité, bijectivité.

Algèbre Linéaire

I/ Géométrie élémentaire de R^2, R^3 *et* R^n :

1. Points et vecteurs, combinaison linéaire de vecteurs, sous-espaces-vectoriels et affines, droites vectorielles du plan et de l'espace (vus comme sous-espaces engendrés).
2. Équations de droites et de plans dans R^2, R^3 *et* R^n.

II/ Systèmes linéaires, calcul matriciel et applications linéaires

1. Systèmes linéaires à coefficients réels ou complexes et méthode du pivot de Gauss pour la résolution
2. Notation matricielle et calcul matriciel, matrices inversibles, lien entre opérations élémentaires et multiplication par des matrices élémentaires, méthode du pivot pour le calcul de l'inverse d'une matrice.
3. Applications linéaires de R^p dans R^n : multiplication d'une matrice par un vecteur, préservation de la colinéarité et des combinaisons linéaires, lien avec les systèmes linéaires. Noyau, image. Cas particulier des applications linéaires de R^n dans R^n.

Analyse

I/ Ensembles usuels de nombres (*N, Z, D, Q, R, C*) et leurs parties, majorant (minorant), plus grand (plus petit) élément, borne supérieure d'une partie de *R*. Densité des rationnels et des décimaux.

II/ Limites des fonctions numériques réelles ; opérations sur les limites, limites des fonctions monotones, comparaison de fonctions, droites asymptotes au graphe d'une fonction.

III/ Continuité des fonctions numériques réelles en un point et sur un intervalle ; théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection réciproque.

IV/ Dérivation :

1. Taux d'accroissement et dérivée, opérations sur les dérivées
2. Théorème de Rolle (admis), théorème des accroissements finis, dérivée et monotonie.
3. Convexité

V/ Fonctions usuelles : fonctions puissances, logarithme(s), exponentielle, fonctions trigonométriques et leurs réciproques, fonctions hyperboliques.

Calculus (HLSE 101, 42hTD, 5 ects)

Calcul élémentaire, Sommations, Dénombrement
Équations et inéquations, Dérivation
Trigonométrie
Nombres complexes
Primitives et Intégration
Équations différentielles (linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants)

HLMA 104 Mathématiques du Choix Collectif
(MG-MI-MP, 24hCM + 24hTD, 5 ects)

I/ Introduction
1) Profil de votes
2) Premiers paradoxes

II/ Relations binaires
1) Préordres / ordres
2) Formalisation de l'agrégation des préférences
3) Borda vs Condorcet

III/ Axiomatisation

1) Les 4 conditions principales : unanimité, non dictature, indépendance des états non pertinents,-universalité
2) Le Théorème d'Arrow
3) Quelques contraintes supplémentaires :
   Sincérité, rationalité, problèmes d'enchères, acyclicité, stratégie dominante, préférences unimodales

IV/ Jugement majoritaire
1) L'exemple des compétitions de patinage
2) Changement de paradigme
3) Le choix Balinski

II/ Semestre 2

HLMA 201 Algèbre Linéaire 2
(MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Espaces vectoriels
Structure d'espace vectoriel (K=Q, R ou C), espaces R^n et C^n, espace des suites réelles, espace des fonctions numériques, combinaisons linéaires et colinéarité, sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel engendré par une partie familles génératrices, familles libres, bases, dimension, théorème de la base incomplète et de l'échange (*sans démonstration*). Somme et somme directe de sous-espaces, supplémentaire.

II/ Applications linéaires
Noyau et image, correspondance application linéaire matrice avec toutes les propriétés usuelles. Changement de base. Invariance de la trace par changement de base et définition de la trace d'un endomorphisme, *tr(uv)=tr(vu)*. Isomorphisme et application linéaire réciproque. Ensembles *GL(E)* et *GL(n)*. Retour sur les systèmes linéaires, et retour sur homothéties, rotations, similitudes, symétries, projections.

III/ Rang des lignes et rang des colonnes d'une matrice
Théorème du rang. Formule de Grassmann.

IV/ Polynômes
Coefficients, degré, racines. Espaces *R[X], C[X]*, $R_n[X]$ et $C_n[X]$ comme exemples d'espaces vectoriels. Changement de base de la base des monômes dans une base du type *1, X-a, (X-*

a)², *(X-a)³*,... Si a est une racine de P, alors il existe Q tel que $P = (X-a)Q$. Polynômes interpolateurs de Lagrange comme illustrations du théorème du rang.

V/Sous espaces affines de R^n et de C^n
Sous-espaces parallèles, sous-espace vectoriel directeur. Dimension d'un sous-espace affine de R^n (ou C^n). Repère *vs*. Base. Hyperplan affine, hyperplan vectoriel, définition par équation linéaire. Liens avec les solutions des systèmes linéaires. Applications affines.

VI/ Produit scalaire dans R^n, définition d'une isométrie affine, exemples. Lien entre équation d'un hyperplan affine et son vecteur normal.

HLMA 202 Analyse 2 (MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Suites de réels

1) Définitions et exemples (suites, suites convergentes, limites)
2) Opérations sur les limites
3) Convergence des suites monotones
4) Comparaison de suites réelles
5) Limite sup, limite inf, suites extraites, valeurs d’adhérences
6) Théorème de Bolzano Weierstrass + toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes
7) Suite de Cauchy
8) Suites récurrentes

II/ Dérivation et applications (suite du S1)

1) Rappels : Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
2) Formules de Taylor
3) Développements Limités
4) Opérations sur les DL
5) DL usuels
6) Développements asymptotiques

III/ Courbes paramétrées du plan

HLMA205 Recherche Opérationnelle
(MG-MI-MP, 24hCM + 24hTD, 5 ects)

I/ Programmation linéaire

1) Problèmes de production
2) Interprétation géométrique
3) Solution graphique à deux variables
4) Forme générale (standard et canonique)
5) Systèmes linéaires et les opérations de pivotage
6) L'algorithme du simplexes
7) Un peu de dualité

II/ Graphes

1) Définitions : degré, connexité, arbres, graphes bipartis et orientés, etc.
2) Matrice d'incidence et matrice d'adjacence (applications - le plus court chemin)
3) Algorithmes de Bellman, de Dijkstra et de Dantzig
4) Relation de la matrice des degrés et la matrice laplacienne (théorème de Kirchhoff et nombre d'arbres couvrants)
5) Problème d'ordonnancements
6) Problème de voyageur
7) Problème du flot maximum

III/ Semestre 3

HLMA 301 Algèbre Linéaire 3
(MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

Groupe symétrique *S(n)* : décomposition canonique d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints, ordre d'un cycle, d'une permutation, conjugaison, *S(n)* est engendré par les transpositions, signature comme unique application multiplicative non-triviale dans *{+1, -1}*.

Polynômes : définition, opérations, degré, $K_n[X]$ (K=Q, R ou C). Divisibilité, polynômes irréductibles, division euclidienne, algorithme d'Euclide. PGCD et PPCM, théorèmes de Bézout et de Gauss. Racines, multiplicité, théorème de décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de D'Alembert-Gauss, décomposition en facteurs irréductibles dans *R[X]* et *C[X]*. Dérivation, formule de Taylor, caractérisation de la multiplicité des racines. Polynôme scindé et simplement scindé. Formules de Viète entre coefficients et racines.

Déterminants d'une matrice et d'une famille de vecteurs de R^n (ou de C^n), déterminant d'une famille de vecteurs dans une base fixée. Opérations élémentaires. Déterminant de la transposée d'une matrice. Décomposition d'une matrice inversible en *DU* et *U'D'* avec *D* et *D'* diagonalisables et *U* et *U'* produit de transvections et déduction de la multiplicativité du déterminant. Déterminant d'un endomorphisme. Développement suivant lignes et colonnes, mineurs. Comatrice. Déterminant et inversibilité, définition du groupe *SL(n)*. Toute matrice de *SL(n)* est produit de transvections. Déterminant par blocs.

Systèmes linéaires. Règles de Cramer.

Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres. Polynôme caractéristique. Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal, décomposition des noyaux, sous-espaces caractéristiques, théorème de Cayley-Hamilton, ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Endomorphismes diagonalisables, caractérisation par les polynômes simplement scindés. Interprétation matricielle. Applications aux suites récurrentes linéaires via le calcul des puissances d'une matrice.

HLMA302 Analyse 3 (MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Intégration

1) Intégrale d'une fonction en escalier
2) Fonctions Riemann Intégrables
3) Primitive et Intégrales
4) Quelques méthodes de calculs (IPP, changement de variables, formules de la moyenne)
5) Sommes de Riemann

II/ Equations différentielles linéaires

1) D'ordre 1
2) D'ordre 2

III/ Séries numériques

1) Définitions : séries, séries convergentes, absolument convergentes, semi convergentes, commutativement convergentes, divergentes.
2) Le critère de Cauchy.
3) Comparaisons de séries à termes positifs.
4) Critères de convergence absolue.
   Règles de Cauchy et de d'Alembert. Comparaison série-intégrale. Equivalence entre absolument convergent et commutativement convergent.
5) Série semi convergentes.
   Transformation d'Abel, critère des séries alternées et de critère de Dirichlet.

IV/ Intégrales généralisées

1) Définitions : intégrales généralisées convergentes, absolument convergentes, semi convergentes, divergentes.
2) Le critère de Cauchy.
3) Comparaisons des intégrales généralisées à termes positifs.
4) Critères de convergence absolue.
5) Intégrales semi convergentes.

HLMA304 Arithmétique (MG-MI-MP, 12hCM + 13,5hTD, 2,5 ects)

Arithmétique de *Z* : division euclidienne, algorithme d'Euclide, théorème de Bézout, décomposition en produit de nombres premiers, PGCD et PPCM, lemmes de Gauss et d'Euclide.

Relation d'équivalence. Congruences modulo un entier, *Z/nZ.* Théorème chinois, petit théorème de Fermat a^p=a mod p.

HLMA310 Intro aux Logiciels Scientifiques (MG, 5 ects)

Partie Analyse Numérique (12hCM + 12hTD-TP)

I/ Premier pas vers la modélisation

On voit les définitions de la modélisation et du calcul scientifique, pourquoi modéliser, comment construire un modèle au travers d'exemples, comment l'analyser et aboutir à des conclusions. Quelques particularités du calcul en flottant sur des exemples pathologiques.

II/ Résolution d'équations scalaires non linéaires

Méthodes itératives (dichotomie, fausse position, sécante, Newton et corde) , exemples et comparaison des avantages et des inconvénients de chaque méthode.

III/ Interpolation

Interpolation de Lagrange, approximation linéaire par morceaux et interpolation d'Hermite. Application aux formules de quadrature et de dérivation numériques (avant, arrière et centrée).

IV/ Méthodes numériques pour les EDO

Rappel sur le calcul des solutions exactes pour les équations linéaires du 1er et second ordre à coefficients constants.
Définition de la consistance, de la stabilité et la convergence d'une méthode numérique vers une solution.

Exemple des méthodes d'Euler explicite et implicite, de Runge-Kutta et des systèmes du premier ordre.

Partie Statistique (12hCM + 12hTD-TP)

Objectifs : Apprentissage du logiciel R en tant que développeur scientifique (et non simple utilisateur)

- Qu'est ce que la programmation scientifique (et notamment statistique)
- Le logiciel R et les conventions d'écritures.
- Premiers pas avec R : notion de console, de script et savoir utiliser l'aide en ligne, impact de la représentation binaire sur les calculs.
- Boucle for et contrôle conditionnel. Application au crible d'Eratosthène.
- Boucle while et repeat. Application à la dynamique d'un jet de pièce + réflexion sur son caractère aléatoire.
- Les fonctions en R et la portée de variables. Application à l'ensemble de Mandelbrot.
- Débugguer un code. Applications aux tours de Hanoï.
- Savoir écrire un code propre et efficace. Application avec l'aiguille de Buffon.
- Savoir traiter un problème scientifique de A à Z. Applications aux problèmes du voyageur de commerce et du recuit simulé.

HLMA311 Probabilités élémentaires
(MG-MP, 12hCM + 13,5hTD, 5 ects)

Objectif : Introduire les notions d'espace probabilisé et de v.a. discrètes.

I/ Espaces probabilisés
Expériences aléatoires. Événements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste. Tribus. Probabilités.

II/ Probabilités conditionnelle et indépendance
Probabilité conditionnelle ; formule des probabilités totales ; formule de Bayes.
Indépendance d'événements; Formule de Poincaré.

III/ Variables aléatoires discrètes
Définition d'une variable aléatoire. Loi de probabilité. Fonction de répartition. Moments.
Fonctions de variable aléatoire. Lois discrètes usuelles: loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

IV/ Semestre 4

HLMA401 Géométrie Euclidienne et Algèbre Bilinéaire

(MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

Espaces euclidiens : produit scalaire, Cauchy-Schwarz, norme et distance euclidienne, inégalité triangulaire, égalité du parallélogramme, théorème de Pythagore. Base orthonormale.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Angles de vecteurs, angles de droites, théorème de l'angle au centre et cocyclicité. Sous-espaces orthogonaux.

Déterminant dans une base orthonormale et volume. Orientation.

Projections orthogonales (application à la méthode des moindres carrés). Isométries linéaires, matrices orthogonales, groupe orthogonal et spécial orthogonal. Exemples d'isométries : au moins rotations, symétries.

Dualité. Définition du dual et du bidual. Orthogonal d'un sous-espace (au sens de la dualité), base duale, base antéduale. Correspondance hyperplans/formes linéaires, dualité entre description paramétrique et description cartésienne d'un sous-espace. Adjoint d'un endomorphisme. Ecriture matricielle, lien avec la transposée.

Formes bilinéaires symétriques sur un R-e.v. Matrice d'une forme bilinéaire. Forme bilinéaire comme applications linéaire entre l'espace et son dual. Noyau et rang d'une forme bilinéaire. Vecteurs isotropes. Forme quadratique. Existence de bases orthogonales. Algorithme de réduction de Gauss. Théorie d'inertie de Sylvester, signature d'une forme quadratique. Classification des formes quadratiques réelles.

Interprétation de la dualité dans un espace euclidien. Endomorphismes symétriques et orthogonaux dans un espace euclidien. Lien avec l'adjoint. Forme quadratique associée. Diagonalisation des matrices symétriques dans une base orthonormale. Diagonalisation simultanée de deux formes symétriques dont l'une est définie positive.

Formes sesquilinéaires hermitiennes et espaces hermitiens. Formes sesquilinéaires et espaces hermitiens. Reprise des notions vues dans le cas réel : définition, matrice, forme quadratique hermitienne, signature et théorème d'inertie de Sylvester dans ce cadre. Espaces hermitiens, définitions, similarités et différences avec les espaces euclidiens, groupe unitaire, endomorphismes autoadjoints.

Endomorphismes normaux, réduction, avec applications aux matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales, unitaires, autoadjointes.

Notion de complexification et de formes réelles.

HLMA402 Analyse 4
(MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Suite de fonctions Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonction

1) Définitions et lien entre convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions
2) Critère de Cauchy uniforme
3) Théorèmes de Dini
4) Théorème de Stone Weierstrass par les polynômes de Bernstein
5) Stabilité de la continuité (resp. dérivabilité, intégration) par convergence uniforme

II/ Série de fonctions

1) Convergences simple et uniforme
2) Convergence normale
3) Continuité, dérivabilité, intégrabilité d'une série de fonctions

III/ Série entière

1) Pourquoi les séries entières (problématique et définitions) ?
2) Rayon et disque de convergence
3) Opération sur les séries entières
4) Comportements d'une série entière sur son disque de convergence et à la frontière
5) Développement en série entière
6) Applications (équation différentielle …)

IV/ Série de Fourier

1) Pourquoi les séries de Fourier (problématique et définitions) ?
2) Convergences (en moyenne quadratique, simple, normale) des séries de Fourier
3) Applications aux calculs de certaines séries et aux équations différentielles

HLMA405 Analyse Numérique Matricielle
(MG, 21hCM + 12hTD + 15HTP, 5 ects)

1. Rappels et compléments d'algèbre linéaire

    1. Quelques définitions+Valeurs et vecteurs propres, rayon spectral, déterminant

    2. Noyau et image d'une matrice

    3. Décompositions d'une matrice

    4. Normes matricielles

2. Méthodes directes

1. Solution numérique des systèmes linéaires
2. Opération élémentaires
3. Méthode de Gauss
4. Matrices SDP : La factorisation de Cholesky
5. Matrices creuses

3. Méthodes itératives

1. Méthodes de point fixe
2. Méthode du gradient conjugué

HLMA406 Probabilités et Statistique élémentaires
(MG-MP, 24hCM + 24hTD 5 ects)

Objectif: Présenter les variables aléatoires à densité, manipuler les vecteurs aléatoires et utiliser les résultats de convergence.

Programme:

I/ Variables aléatoires à densité:
Fonction de répartition, densité. Moments. Fonctions de variable aléatoire. Lois définies par une densité usuelle: loi uniforme, exponentielle, normale.

II/ Vecteurs aléatoires: Loi jointe, lois marginales et conditionnelles. Indépendance. Propriétés de l'espérance et de la variance. Covariance.

III/ Convergence: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres. Théorème limite central (admis) et applications.

IV/ Echantillonnage et estimation:
Propriétés d'un estimateur. Méthode des moments. Méthode du maximum de vraisemblance.

V/ Intervalles de confiance et tests statistiques.

HLMA412 Compléments d'Analyse
(MG-MI-MP, 12hCM + 13,5hTD, 2,5 ects)

Objectif : introduire, dans un cadre concret, des définitions et démonstrations utilisant la théorie des ensembles et mettant en jeu la notion de limite dans le but de favoriser auprès des étudiants l'acquisition de raisonnements et le développement de l'intuition sur des concepts qui seront à la base de l'analyse enseignée en L3.

I/ Cardinalité-Dénombrabilité (3hCM + 3hTD)

Injection, surjection, bijection (rappels).
Equivalence entre il existe "une injection de E dans F" et "une surjection de F dans E".
Equipotence. Cardinal. Théorème de Cantor Bernstein (admis).
Le cardinal d'un ensemble fini s'identifie à son nombre d'éléments.
card ($\{0,1\}^E$) = card (P(E)) > card(E). Pas de borne sup en termes de cardinaux.
Ensemble dénombrable (i.e. injectable dans **N**) : définition et exemples.
Tout ensemble infini dénombrable est en bijection avec **N**.
Un produit fini de dénombrables est dénombrable.
Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
$\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et tout intervalle non vide de **R** sont non dénombrables.

II/ Topologie de $\mathbf{R}^d$ (9hCM + 10,5hTD)

1) Sur R

Suites réelles convergentes (dans [-∞,+∞]).
Toute suite monotone converge (dans [-∞,+∞]).
limsup/liminf : définitions et propriétés.
Equivalence entre "la suite converge" et "limsup=liminf".
Suites extraites. Valeurs d'adhérences.
Caractérisation des limsup/liminf comme valeurs d'adhérences.
Suites de Cauchy dans **R**. Incomplétude de **Q**. Complétude de **R** (admise).
Ouverts de **R**. Voisinages. Fermés de **R** (définition topologique et caractérisation séquentielle). Compacts de **R** (définition séquentielle uniquement et équivalence entre compact et fermé borné).

2) Sur $\mathbf{R}^d$

Normes ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ sur $\mathbf{R}^d$. Equivalence de ces trois normes.
Suites convergentes dans $\mathbf{R}^d$. Suites de Cauchy dans $\mathbf{R}^d$. Complétude de $\mathbf{R}^d$.
Ouverts de $\mathbf{R}^d$. Voisinages. Fermés de $\mathbf{R}^d$ (définition topologique et caractérisation séquentielle). Compacts de $\mathbf{R}^d$ (définition séquentielle uniquement et équivalence entre compact et fermé borné).

3) Fonctions continues de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^p$

3.1) Généralités :
Définition de la continuité (par les suites). Exemples.
Equivalence entre "f continue" et "l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert".
Equivalence entre "f continue" et "chaque composante de f est continue".

3.2) Propriétés d'une fonction f continue de K, compact de $\mathbf{R}^d$, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$.

a) Uniforme continuité.

b) f(K) est compact.

c) Pour p=1 : f est bornée et atteint ses bornes

V/ Semestre 5

HLMA501 Algèbre Linéaire et Théorie des Groupes (MG-MI-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Algèbre linéaire

1) Endomorphismes nilpotents, endomorphismes trigonalisables.
2) Systèmes d´équations différentielles, dimension de l´espace des solutions, application de la diagonalisation à la résolution. Exponentielle de matrice.
3) Théorème de décomposition de Dunford. Forme de Jordan sans preuve.

II/ Groupes :

1) Groupes, sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie, groupe produit, morphismes.
2) Groupes cycliques, nombre de générateurs, sous-groupes, produit de groupes cycliques ; groupes monogènes, sous-groupes de Z ; sous-groupes de (R,+) ;
3) Groupes diédraux ;
4) le groupe symétrique d'un ensemble fini (théorème de Cayley, cycles, forme normale d'une permutation, longueur, ordre, signature) ;
5) Actions de groupes : rappels sur les ensembles quotients, notions d'orbite et stabilisateur, classes d'un groupe modulo un sous-groupe, indice d'un sous-groupe, formule des classes, théorème de Lagrange, théorèmes de Sylow ;
6) Quotients : sous-groupes distingués, groupes quotients, factorisation d'applications par une relation d'équivalence, factorisation de morphismes de groupes, théorème de correspondance et théorèmes d'isomorphismes

HLMA502 Topologie des espaces métriques
(MG-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Espaces topologiques, espaces métriques

1) Définitions (ouvert, fermé, voisinage), continuité propriétés et exemples
2) Espace métrique
3) Espace produit, Espace quotient
4) Complétude, complétion d'un espace métrique, Théorème du point fixe pour les contractions
5) Séparabilité
6) Compacité
7) Connexité

II/ Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach

1) Définitions et exemples
2) Séries à valeurs dans un Banach
3) Evn de dimension finie (équivalence des normes, Théorème de Riesz)
4) Exemples de Banach en dimension infinie (espace de suites, espace des fonctions continue sur un compact muni de la norme uniforme …)

III/ Application linéaire, bilinéaire continue, dualité

1) Applications linéaires continues entre deux Banach
2) Dual topologique
3) Applications bilinéaires continues

IV/ Espace de Hilbert (sur R uniquement)

1) Définition et première propriétés
2) Projection sur un convexe fermé
3) Dual d'un espace de Hilbert

HLMA503 Mesure et Intégration
(MG-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Prérequis

1) Eléments de théorie des ensembles (rappels)
   Classe de parties. Dénombrabilités.

2) Somme d’une famille de termes positifs
   Définition (comme sup sur les sommes finies), propriétés (additivité, homogénéité positive, sommation par paquet, Fubini positif, convergence monotone)
3) Famille sommable
   Définition), propriétés (linéarité, croissance, sommation par paquet, Fubini, convergence dominée)

II/ Espace mesuré.

1) Définition, Exemple des mesures discrètes
2) Propriétés générales des mesures
3) Construction d'espace mesuré (Tribu engendrée. Tribu borélienne, Théorème de Carathéodory, caractérisation d’une mesure sur un pi système)
4) Mesure de Lebesgue sur (R,B(R)) : Existence et propriétés
5) Mesures produits. Exemple de la mesure de Lebesgue sur (R^n,B(R^n))

III/ Fonctions mesurables.

1) Définition de la mesurabilité.
2) Critères de mesurabilité.
3) Mesure image d'une mesure par une fonction mesurable

IV/ Construction de l'intégrale de Lebesgue et théorèmes d'interversion limite-intégrale

1) Construction de l'intégrale (sur l'ensemble des fonctions mesurables positives et sur l'espace L^1). Propriétés (linéarité, croissance, inégalité de Markov ...).
2) Théorèmes d'interversions limite-intégrale (cv monotone, Fatou, cv dominée)
3) Intégrales dépendant d'un paramètre : critères de continuité et de dérivabilité

V/ Quelques cas particuliers importants

1) Intégration et mesure produit : le Théorème de Fubini
2) Intégration et mesure de Lebesgue sur (R^n, B(R^n))
   (extension de l’intégration de Riemann, changement de variable)
3) Intégration et mesure à densité
4) Intégration et mesure image : le Théorème de transfert

VI/ Espaces L^p

1) Définition. Inégalités de Holder et de Minkowski.
2) L^p est un Banach, L^2 un Hilbert, densité dans les L^p

V/ Convergences des fonctions dans un espace mesuré

VI/ Fonction caractéristique d’une mesure borné

VII/ Convergences d’une suite de mesure bornées

HLMA504 Analyse Numérique des EDO
(MG-MP, 19,5hCM + 12hTD + 18HTP, 5 ects)

I/ Représentation des nombres et arithmétique des ordinateurs. Exemples d'arrondis catastrophiques.

II/ Résolution d'équations non linéaires scalaire

Dichotomie, point fixe, Newton, sécante et variantes. Preuve et vitesses de convergence.

III/ Interpolation polynomiale

Polynôme de Lagrange et de Newton. Phénomène de Runge.
Notions sur l'interpolation de Hermite. Splines cubiques.

IV/ Quadratures

Point milieu, trapèze, Simpson, Newton-Cotes. Ordre d'exactitude.
Accélération de Romberg-Richardson
Méthode de Gauss et polynômes de Legendre.
Méthode de Monte-Carlo.

V/ Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

Interprétation géométrique d'une EDO en terme de ligne de champs de vecteurs.
Ecriture du problème de Cauchy comme point fixe.
Théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard (cas scalaire).
Méthode à un pas : Euler, Runge, Heun, Runge-Kutta.
Erreur de consistance. Ordre de convergence des schémas.
Méthode multipas explicite et implicite.Stabilité.
Notions sur les équations raides.

VI/ Semestre 6

HLMA601 Géométrie

(MG voie maths capes, 42hCM + 48hTD, 10 ects)

I/ Géométrie affine.

En S2 les étudiants ont étudié un cas particulier : des sous espaces affines de R^d. On veut ici donner une définition plus générale et expliquer qu'on peut (mais ce n'est pas une obligation) se ramener à en choisissant un repère. Comme on peut choisir plusieurs repères, on devra connaître des formules de changement de repère.

- Définition des espaces affines et des sous espaces affines.
- Applications affine
- Barycentres
- Théorèmes classiques
- Repères
- Géométrie du triangle

II/ Géométrie vectorielle euclidienne.

En S4 on a déjà vu

- Produit scalaire, orthogonalité, norme, bases orthonormées, orientation
- Angles orientés de vecteurs dans le plan.
- Projection orthogonale.
- Isométries linéaires, matrice sorthogonales, groupe orthogonal et spécial orthogonal. Exemples d'isométries : au moins rotations et symétries.

En S6, après d'éventuels rappels sur ce qui précède

- Angles non orientés dans l'espace.
- Etude détaillée des isométries linéaires en dimension 2 et 3, classification par l'ensemble des vecteurs fixes.
- Similitudes linéaires

III/ Géométrie affine euclidienne.

- Structure d'espace affine euclidien, repère orthonormé
- Projections orthogonales
- Symétries orthogonales
- Etude détaillée des isométries affines en dimension 2 et 3, classification par l'ensemble des points fixes.
- Polygônes réguliers, groupe d'isométrie d'une figure

Prolongements possibles

- Similitudes affines,
- Nombres complexes et similitudes planes.

III/ Courbes paramétrées du plan et de l'espace

- Etude des courbes régulières
- Notion de tangente à une courbe
- Etude des points singuliers dans le repère local

HLMA602 Calcul différentiel et équations différentielles
(MG-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Différentiabilité

1) Motivation et définition de la différentielle
2) Premières propriétés (Continuité, espace tangent, linéarité, composition)
3) Exemples d'applications différentiables. (De R dans R^n, linéaires, multilinéaires)
4) Dérivées directionnelles et partielles, Jacobienne
5) Inégalité des accroissements finis
6) Fonctions de classe C1

II/ Différentielles d'ordres supérieures

1) La forme bilinéaire "différentielle seconde".
2) Lemme de Schwarz et symétrie de la différentielle seconde.
3) Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
4) Extrema locaux.
5) Différentielle en tout ordre et formule de Taylor.

III/ Inversion locale et fonctions implicites

1) Notion de difféomorphisme
2) Théorème d'inversion locale
3) Théorème des fonctions implicites.

IV/ Equations différentielles

1) Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?
2) Equations différentielles linéaires à opérateur constant.
3) Equation différentielle linéaire générale
4) Le Théorème de Cauchy-Lipschitz
5) Equations autonomes et champs de vecteurs.

HLMA603 Probabilités et Statistique

(MG-MP, 39hCM + 36hTD, 7,5 ects)

I/ Espace de probabilité

1) Rappels sur les tribus
2) Loi de Probabilité
3) Formule de Bayes
4) Indépendance d'événements et de tribus

II/ Variables Aléatoires

1) Définition
2) Exemples de variables aléatoires, lois usuelles
3) Indépendance de variables aléatoires
4) Fonction de répartition
5) Espérance et variance
6) Fonction caractéristique

III/ Convergence des v.a.

1) Loi du 0 - 1
2) Convergence presque sure et en probabilité
3) Convergence dans L^p
4) La Loi des grands nombres
5) Application de la loi des grands nombres à l'estimation ponctuelle

IV/ Convergence en loi

1) Définition
2) Critères de convergence en loi
3) Comparaison de la convergence en loi avec les autres convergences
4) Le Théorème central limite
5) Application du théorème central limite à l'estimation par intervalles

V/ Vecteurs gaussiens

1) Définition et propriétés
2) Indépendance
3) Lois satellites des lois gaussiennes
4) Application à la statistique du khi2.

HLMA605 Analyse Complexe

(MG voie MAF-MP, 21hCM + 28,5hTD, 5 ects)

I/ Fonctions analytiques

1) Définitions et exemples
2) Prolongement analytique, principe des zéros isolés
3) Principe du maximum

II/ Fonctions holomorphes, formules de Cauchy

1) Définitions et propriétés
2) Relations de Cauchy Riemann, harmonicité des parties réelle et imaginaire
3) Intégrale le long d'un chemin, indice
4) Théorème de Cauchy et analycité des fonctions holomorphes

III/ Fonctions méromorphes, singularités et résidus

1) Séries de Laurent
2) Fonctions méromorphes, pôle, résidus
3) Formule des résidus
4) Exemples de calcul d'intégrale par la formule des résidus

HLMA606 Optimisation
(MG option du parcours MAF-Option MP, 21hCM + 28,5hTD, 5 ects)

I/ Rappel des notions nécessaires en analyse, calcul différentiel, topologie, algèbre linéaire

II/ Formulation et exemples de problèmes d'optimisation (avec et sans contrainte, linéaire et nonlinéaire)

III/ Optimisation sans contrainte. Convexité. Conditions d'optimalité (nécessaire et suffisante).

IV/ Optimisation avec contraintes d'égalité. Formulation forte et faible. Lagrangien. Interprétation géométrique.

V/ Optimisation avec contraintes générales. Conditions KKT.

VI/ Algorithmes numériques s'inspirant des 3 étapes précédentes et discussion sur leur implémentation et limites d'utilisation.

VII/ Exemples d'applications: minimisation par moindres carrés, maximisation de la vraisemblance, minimisation d'une énergie, maximisation d'une fonction d'utilité, optimisation d'un réseau de distribution.

HLMA604 Théorie des Anneaux et des Corps
(MG option du parcours MAF-Option MP, 21hCM + 28,5hTD, 5 ects)

Anneaux (uniquement commutatifs), groupe des éléments inversibles, anneaux intègres. Exemples, A[X], A[X,Y] etc..

Définition d'un corps.

Sous-anneaux, sous-anneau engendré par une partie ; idéaux, idéal propre, idéal engendré par une partie, anneau produit, morphismes d'anneaux, comportement des idéaux par un morphisme. Exemples.

Anneau quotient. Théorème d'isomorphisme. Théorème chinois.

Idéal premier, idéal maximal, idéal principal. Exemples et contrexemples (parmi les exemples doit figurer Z[X]). L'idéal est premier (maximal) si le quotient est un anneau intègre (un corps).

Idéaux de Z. L'anneau Z/nZ est un corps si et seulement si n est premier. Applications : le théorème de Wilson, le petit théorème de Fermat. Groupe des éléments inversibles de Z/nZ. Application : le petit théorème de Fermat généralisé.

Corps de fractions d'un anneau intègre.

Eléments nilpotents et idempotents.

Divisibilité dans un anneau intègre. Eléments irréductibles et premiers.

Anneaux principaux et euclidiens. Exemples Z, K[X] et Z[i]. L'exemple de Z[i] sera développé (norme, éléments inversibles, éléments premiers, décomposition des nombres premiers de Z dans Z[i] ; le corps de fractions de Z[i] est Q[i]).

Définition des anneaux factoriels avec pour exemple Z[X].

Notion de caractéristique d'un anneau ou d'un corps. Une extension de corps L/K fait de L un K espace vectoriel. Application : un corps fini est un extension finie d'un Z/pZ et a donc toujours p^n éléments.

HLMA607 Modélisation Déterministe et Stochastique
(MG voie MAF-MP, 21hCM + 30hTD, 5 ects)

Partie déterministe (10,5hCM + 15hTD-TP)

-Rappel des notions d'analyse des EDO et EDP nécessaires. Conditions initiales et aux limites.

-Modélisation des phénomènes fondamentaux (diffusion de la chaleur, propagation des ondes,transport de scalaire passif) et introduction des équations fondamentales associées.
-Exemples d'applications industrielles dans chaque situation.
-Exemples de problèmes couplés multi-physiques.
-Analyse de Fourier appliquée.
-Méthodes numériques (spectrales et différences finies) pour chaque situation.
-Programmation et modification de programmes pour ajout de fonctionnalités. Le but de ces réalisations est de découvrir par la pratique les limites et conditions d'application des méthodes ainsi qu'appréhender la difficile question de l'interprétation des résultats.

Partie stochastique (10,5hCM + 15hTD-TP)

I/ Introduction

II/ Simulation selon une loi donnée

1) Le début du voyage : la $U(0, 1)$
2) La méthode d'inversion
3) La méthode du rejet
4) Algorithme du ratio
5) Méthodes spécifiques

III/ Intégration par Monte Carlo

1) Modèle de Black–Scholes
2) Approche basique
3) Variables antithétiques
4) Variables de contrôle
5) Échantillonnage préférentiel

HLMA610 Initiation à l'enseignement des mathématiques (MG voie Capes, 5 ects)

Introduction aux questions enseignement et d'apprentissage des mathématiques et éléments de didactique des mathématiques (résolution de problèmes, statut de l'erreur, conceptions d'élèves, variable didactique, ...)
Éléments de didactique de champs spécifiques : géométrie, algèbre, nombres et calcul...
Stage d'observation accompagné de 7 semaines (environ 21h) dans une classe.
Réalisation d'un mémoire sur l'expérience du stage, sur une question d'enseignement/apprentissage des mathématiques mise à l'épreuve et sur une séance de classe conçue/mise en œuvre.