M1 MATHEMATIQUES FONDAMENTALES
PROGRAMMES DU LMD5

<u>SEMESTRE 1</u>

Anglais (2 ECTS, 18 HTD)

Algèbre I (8 ECTS, 27 HCM, 27 HTD) :

<u>Prérequis :</u> le contenu des deux cours de L3 « Groupes et anneaux 1 » et «Groupes et anneaux 2 ».

<u>Objectifs :</u> maîtriser des notions de base de la théorie des modules et de la théorie des représentations.

<u>Programme :</u>

0. Rappels de Licence sur les anneaux (intègres, factoriels, principaux, euclidiens, corps). Compléments : existence d'idéaux maximaux via le lemme de Zorn. Notion d'élément nilpotent, nilradical.

1. Modules sur un anneau : notions de module, d'algèbre sur un anneau ; morphismes, Restriction des scalaires. Théorèmes de factorisation et d'isomorphisme. (Sous-)Module de torsion, module libre, module de type fini. Notion de rang. Suite exactes courtes de modules, extensions de modules. Produit et somme directe. Produit tensoriel sur un corps, puis sur un anneau commutatif quelconque; isomorphisme (en dimension finie) entre Hom(E,F) et $E^* \otimes F$.

L'enseignant pourra, en complément de ces notions, introduire celles de produit extérieur, produit symétrique, défaut d'exactitude du produit tensoriel, module projectif (exemples non exhaustifs).

2. Structure des modules de type fini sur un anneau principal. Application aux groupes abéliens, application à la réduction des homomorphismes. Forme normale de Smith, invariants de similitude.

3. Représentations des groupes finis : notion de représentations linéaire d'un groupe, de morphisme entre représentations. Les représentations comme modules sur l'algèbre du groupe. Sous-représentation, représentation irréductible. Somme directe, produit tensoriel de représentations. Complète réductibilité. Lemme de Schur. Caractères, tables de caractères, orthogonalité des caractères. La décomposition de la représentation régulière. Exemples : groupes abéliens, groupes diédraux, groupes symétriques.

Analyse fonctionnelle (7 ECTS, 24 HCM, 24 HTD)

Prérequis : le contenu des deux cours de L3 « Topologie des espaces métriques » et « Mesure, intégration, Fourier ».

Objectif : maîtriser des outils de base de l'étude des espaces de fonctions.

Programme :

0. Rappels de Licence sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert.

1. Espaces de Baire, théorème de Banach-Steinhaus, théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.

2. Espaces C(K) : théorème d'Ascoli, théorème de Stone-Weierstrass.

3. Théorème de Hahn-Banach : forme analytique, forme géométrique.

4. Dualité et topologies faibles : dual topologique, topologie faible, topologie faible*, notion d'espace réflexif.

5. Analyse spectrale : opérateurs compacts, décomposition spectrale.

Géométrie et groupes classiques (8 ECTS, 27 HCM, 27 HTD)

Prérequis : le contenu des des deux cours de L3 « Groupes et anneaux 1 » et « Topologie des espaces métriques ».

Objectifs : Maîtriser des outils de base de géométrie.

Programme :

0. Groupes et actions de groupes : rappels, produit semi-direct.

1. Le groupe général linéaire GL_n : action sur M_n par équivalences, par similitudes. Interprétation du pivot de Gauss et théorème de Jordan sur C ou R. Connexité de Gl_n, densité dans M_n, adhérence de classes de similitudes. Action de GL_n sur les droites vectorielles. Le groupe projectif linéaire ; en dimension 2 : les homographies.

2. Groupes unitaires et orthogonaux : interprétation matricielle, relation avec les formes hermitiennes, réduction, classes de conjugaison. Propriétés topologiques. Groupes d'isométrie de polygones et polyèdres réguliers en dimension 2 et 3.

3. Exponentielle de matrice et décomposition polaire : matrices hermitiennes et symétriques réelles, réduction de ces matrices, racines carrées de matrices hermitiennes définies

positives. Décomposition polaire pour Gl_n (C ou R). Exponentielle de matrice et décomposition polaire, aspects topologiques.

4. Développements et applications, par exemple liées aux représentations linéaires de groupes finis (étudiées dans l'UE algèbre I), ou à l'action de SL(2,R) sur le demi-plan de Poincaré.

Option 1 : Analyse des EDP 1 (5 ECTS, 21 HCM, 21 HTD)

Prérequis : le contenu du cours de L3 « Topologie des espaces métriques » et « Mesure, Intégration, Fourier ».

Objectifs : maîtriser des outils de base pour l'étude théorique des EDP linéaires classiques dans R^n.

Programme indicatif :

1. Compléments de théorie de la mesure (les espaces « loc »)

2. Etude du produit de Convolution.

3. Notions sur la théorie des distributions

4. Distributions tempérées et transformée de Fourier.

5. Espaces de Sobolev modelés sur L2.

Option 2 : Analyse Numérique des EDP (5 ECTS ; 21 HCM, 15 HTD, 6 HTP)

Prérequis : Licence de Mathématique dans sa globalité, avec un accent mis sur le calcul différentiel et l'intégration ; une expérience en programmation est souhaitable.

Objectifs : Introduire les schémas numériques ainsi que les outils d'analyse numérique nécessaires à la résolution des équations aux dérivées partielles.

Programme indicatif :

1) Introduction aux EDP : définition des EDP, classification des EDP (hyperboliques, elliptiques, paraboliques).

2) Méthodes aux différences finies (DF) : approximation des opérateurs différentiels à l'aide de méthodes DF, résolution de problèmes stationnaires puis instationnaires, étude de précision et de stabilité.

3) Résolution analytique des lois de conservation scalaires (LCS) : méthode des caractéristiques, solutions faibles, inégalité d'entropie, problèmes de Riemann.

4) Méthodes volumes finis (VF) : méthodes VF appliquées au LCS, schéma de Godunov, flux numériques, schémas TVD.

SEMESTRE 2

Algèbre II : corps et théorie de Galois (5 ECTS ; 21 HCM, 21 HTD)

Prérequis : le contenu des deux cours de L3 «Groupes et anneaux 1 » et « Groupes et anneaux 2 » .

Objectif : maîtriser les outils de base de l'étude des corps ; introduire la correspondance de Galois, et le théorème de Galois sur la résolubilité des polynômes par radicaux.

Programme :

1. Révisions sur les anneaux, les corps ; sous-corps premier, caractéristique d'un corps, morphisme de Frobenius, factorisation et critère d'Eisenstein.

2. Extensions de corps : formule des degrés, extensions algébriques, corps algébriquement clos, clôtures algébriques, corps de rupture, corps de décomposition, prolongements des morphismes de corps.

3. Le groupe de Galois ; sous-corps invariants, théorème d'Artin.

4. Les corps finis : groupe de Galois, sous-corps, correspondance de Galois.

5. Extensions normales, celles qui sont finies sont des corps de décomposition.

6. Polynômes et extensions séparables: définitions, composition des extensions séparables, corps parfaits (caractérisations), théorème de l'élément primitif.

7. Extensions galoisiennes : définition(s), éléments conjugués. Correspondance de Galois ; exemples et applications.

8. Résolution d'équations polynomiales : groupe de Galois d'un polynôme, action sur les racines, théorème de Galois de résolubilité par radicaux en caractéristique nulle.

Géométrie différentielle (5 ECTS ; 21 HCM, 21 HTD)

Prérequis : le contenu du cours de L3 « Calcul différentiel et équations différentielles».

Objectifs : Maîtriser des outils de base pour l'étude des variétés différentiables.

Programme :

1. Courbes du plan et de l'espace : courbure d'une courbe du plan, courbure et torsion d'une courbe de l'espace.

2. Révisions de calcul différentiel dans R^n : accroissements finis, inversion locale, fonctions implicites, formes normales des immersions et des submersions. Applications : sous-variétés de R^n, exemples standards, espace tangent, orientation.

3. Surfaces dans R^3, seconde forme fondamentale, courbure.

4. Applications différentiables, valeurs régulières, théorème de Brown et applications.

5. Champs de vecteurs et flots.

Le cours sera illustré par des applications, au choix de l'enseignant. Exemples (non exhaustif) :
- minoration de la courbure totale des courbes nouées ;
- preuve du théorème de Jordan dans le plan ;
- théorème de Gauss-Bonnet sur les surfaces ;
- notion de variété abstraite avec exemples standards : les espaces projectifs, les grassmaniennes.

Groupes et algèbres de Lie (3 ECTS, 12 HCM, 12 HTD)

Prérequis : le cours « Géométrie différentielle » du M1.

Objectifs : appliquer des outils de base de géométrie différentielle.

Programme :

1. Notion de groupe de Lie. Les exemples standards : les sous groupes fermés de GL_n.

2. Notion d'algèbre de Lie. Champs de vecteurs invariants. Les exemples standards : les sous-algèbres de Lie de gl_n.

3. L'application exponentielle.

Le cours sera illustré par des applications, au choix de l'enseignant, par exemple les grassmanniennes comme espaces homogènes, ou les représentations adjointe et coadjointe.

Analyse Complexe et Topologie (7 ECTS ; 27 HCM, 24 HTD)

Prérequis : le contenu du cours de L3 « Analyse complexe ».

Objectifs : Maîtriser les bases de l’analyse complexe et introduire les premiers éléments de topologie algébrique.

Programme :

0. Révisions de Licence : fonctions holomorphes, développement en série entière, formule et théorème de Cauchy, théorème de Morera, principe du maximum.

1. Analyse complexe : singularités, fonctions méromorphes, théorème des résidus, théorème de l'application ouverte, biholomorphismes, théorème de représentation conforme de Riemann.

2. Groupe fondamental et revêtements : homotopie de chemins, d’applications, rétraction par déformation ; définition du groupe fondamental et des revêtements ; le groupe fondamental du cercle, le degré d’une application du cercle vers lui-même ; énoncé du théorème de Seifert-Van-Kampen, applications (ex. groupes fondamentaux des graphes); les surfaces de Riemann des fonctions logarithme complexe et racines complexe.

Le cours pourra être complété par des développements, au choix de l’enseignant. Exemples (non exhaustifs) : transformations de Schwarz-Christoffel (partie 1), relèvement des chemins, des homotopies, des applications (partie 2).

Algèbre, Géométrie et Calculs (5 ECTS, 21HCM, 21 HTD)

Prérequis : Séries de Fourier usuelle dans L2(R/Z), réduction des endomorphismes, Jordan, le cours du premier semestre « Algèbre I ».

Objectifs : introduire les premiers éléments de géométrie algébrique, et préparer les étudiants de M1 à l'option de modélisation de l'agregation ; cette UE comprend des TP informatique en SageMath (calcul formel).

Programme :

1. Algèbre linéaire effective sur les anneaux euclidiens : formes normales de Hermite, de Smith, réduction de Frobenius, facteurs invariants d'une matrice. Théorème de la base adaptée et applications.

2. Multiplication rapide de polynômes : calculs de complexité et multiplication usuelle, Algorithme de Karatsuba, transformée de Fourier d'une groupe abélien fini, transformée de Fourier discrète pour les polynômes, algorithme de transformée de Fourier rapide.

3. Résultant : matrice de Sylvester, méthodes d'élimination, expression en fonction des racines, discriminant.

4. Introduction à la géométrie algébrique : espace affine, études de courbes planes (ex. quadriques), énoncé du nullstellensatz, topologie de Zariski.

5. Bases de Groebner : ordres monomiaux, algorithme de Buchberger et algorithmes d'élimination.

Le cours pourra être complété par des développements, au choix de l'enseignant. Exemples (non exhaustifs) : preuve du Nullstellensatz, inégalité de Bezout (partie 4), théorèmes sur les bases de Groebner (partie 5).

TER (5 ECTS)

Il s'agit d'un projet encadré par un chercheur ou un enseignant-chercheur. Son objectif principal est la rédaction d'un mémoire d'une trentaine de pages environ. Ce mémoire est soutenu oralement devant un jury. Il est possible de travailler en binôme.