UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

M1 Modélisation et Analyse NUmérique (MANU)

Programme du LMD5

Responsable : François Vilar

Secrétariat pédagogique : Eric Hugounenq

Description

MANU est un programme de haut niveau orienté vers la résolution de problèmes appliqués (industriels, physiques, biologie, santé) par l'analyse mathématique et la simulation numérique. Son but est de former des docteur.es ou, plus généralement, des scientifiques avec un sens concret des problèmes et une maîtrise approfondie des outils d'approximation numérique, aussi bien que des techniques d'analyse les plus récentes. Le parcours intègre un noyau important d'UE avancées d'analyse numérique et théorique des EDP avec des cours d'optimisation et apprentissage, d'informatique, et de modélisation. Un atout important est la familiarisation avec les outils avancés de mise en uvre et un lien étroit avec des sujets de recherche récents issus des milieux académique et industriel. La première année de la formation permet de faire la transition entre un parcours universitaire classique et les cours avancés de deuxième année où ces compétences mixtes entre théorie et applications seront acquises.

Objectifs : Préparer aux notions avancées de deuxième année en vue des objectifs suivants :

- Former des docteur.es ou, plus généralement, des scientifiques capables d'interagir dans un contexte multi-disciplinaire
- Assurer une formation théorique solide permettant la poursuite en thèse académique ou industrielle
- Répondre à la demande des centres R&D des grandes entreprises/EPIC d'ingénieurs-docteurs capables d'intervenir dans le noyau de calcul d'un simulateur
- Donner des ouvertures sur les nouveaux champs d'applications du calcul scientifique (environnement, santé, etc.)

Savoir-faire et compétences : Les compétences acquises durant les deux années de formation sont transverses et permettent de développer une compréhension approfondie de la modélisation mathématique, de l'analyse numérique et du calcul scientifique. La première année présente des préliminaires afin de développer ces compétences. Ils sont complétés en deuxième année par des cours plus avancés.

Semestre 1

Unité d'Enseignement	Volume horaire	ECTS
Analyse Numérique 1	21 CM, 15 TD, 6 TP	5
Analyse Numérique 2	12 CM, 12 TP	4
Analyse des EDP 1	21 CM, 21 TD	5
Analyse des EDP 2	12 CM, 12 TD	4
Analyse fonctionnelle	24 CM, 24 TD	7
Optimisation	21 CM, 21 TD	5

CM : Cours magistraux, TD : Travaux dirigés, TP : Travaux pratiques

1.1 Analyse Numérique 1

Description : Les Équations aux Dérivées Partielles (EDP) sont de nos jours un objet mathématique incontournable à l'étude et la compréhension des phénomènes physiques ou biologiques. Leur très grande complexité les rend bien souvent impossible à résoudre analytiquement ; d'où la nécessité d'utiliser des méthodes de résolution numérique.
Ce cours est dédié à l'introduction des EDP, puis à leur résolution à l'aide de schémas numériques bien connus telles que les méthodes différences finies et volumes finis. Une partie plus analyse, nécessaire à l'introduction des méthodes volumes finis, sera consacrée à la résolution analytique des lois de conservation scalaire. Quatre TPs de programmation permettront d'illustrer dans des exemples simples les outils de calcul scientifique vus en cours.

Objectifs : Introduire les schémas numériques ainsi que les outils d'analyse numérique nécessaires à la résolution des équations aux dérivées partielles.

Pré-requis nécessaires : Licence de Mathématique dans sa globalité, avec un accent mis sur le calcul différentiel et l'intégration.

Pré-requis recommandés : Il est recommandé d'avoir suivi des modules d'analyse numérique de Licence couvrant les sujets suivants : interpolation de fonctions, quadrature d'intégrales, et méthodes numériques pour les EDO. Une expérience en programmation est également souhaitable.

1.2 Analyse Numérique 2

Description : Ce cours vient en complément du cours Analyse Numérique 1. Certaines notions du programme du dît cours y sont développées et approfondies. Les méthodes numériques sont également mises en oeuvre dans le cadre de Travaux Pratiques et de projets personnels.

Objectifs : Étudier plus en profondeur la pertinence des schémas numériques vus dans le cours d'Analyse Numérique 1, avec également un accent mis sur le calcul scientifique à travers 12h de travaux pratiques sur ordinateur.

Pré-requis : Ce cours est associé au cours d'Analyse Numérique 1 et nécessite donc les même pré-requis.

1.3 Analyse des EDP 1

Description : La construction de solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) et l'étude théorique de leurs comportements qualitatifs est essentiellement basée sur l'utilisation de résultats d'analyse et en particulier d'analyse fonctionnelle. Ce cours présente de premiers outils importants pour la résolution d'EDP via des points de vue analytiques ou géométriques. Ces outils seront mis en uvre dans l'étude de quelques exemples d'EDP représentatives de grandes classes d'équations.

Objectifs : Introduire les outils de base pour l'étude théorique des EDP linéaires classiques dans $\mathbb{R}^n$.

Pré-requis nécessaires : Avoir suivi des cours de théorie de la mesure, d'intégration et d'analyse de Fourier niveau licence.

Pré-requis recommandés : Le cours utilisera les notions développées dans les UEs de L1 et L2 à l'université de Montpellier sur la théorie de la mesure, l'intégration et l'analyse de Fourier des niveaux. Les deux cours de L3 "Topologie des espaces métriques" et "Mesure, Intégration & Fourier" sont également recommandés.

1.4 Analyse des EDP 2

Description : Ce cours vient compléter les notions développées dans le cours d'Analyse des EDP 1. Il est notamment l'occasion d'étudier en profondeur certaines EDP linéaires posées sur un ouvert de Rn, comme par exemple le problème de Dirichlet, l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger ou l'équation des ondes.

Objectifs : Mettre en perspective les notions d'Analyse dans le cadre de la résolution théorique des équations aux dérivées partielles.

Pré-requis : Ce cours est associé au cours d'analyse des EDP 1 et nécessite donc les même pré-requis.

1.5 Analyse fonctionnelle

Description :

1. Rappels de Licence sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert.
2. Espaces de Baire, théorème de Banach-Steinhaus, théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.
3. Espaces $C(K)$: théorème d'Ascoli, théorème de Stone-Weierstrass.
4. Théorème de Hahn-Banach : forme analytique, forme géométrique.
5. Dualité et topologies faibles : dual topologique, topologie faible, topologie faible*, notion d'espace réflexif.
6. Analyse spectrale : opérateurs compacts, décomposition spectrale.

Objectifs : Maîtriser des outils de base de l'étude des espaces de fonctions.

Pré-requis : Le contenu des deux cours de L3 "Topologie des espaces métriques" et "Mesure, intégration, Fourier".

1.6 Optimisation

Description : Ce cours est la continuation du cours d'optimisation du second semestre de L3. Après un rappel des résultats et méthodes numérique pour les problèmes d'optimisation d'ordre un et deux, sans contrainte et sous contraintes d'égalité et d'inégalité, le cours s'intéresse aux questions aujourd'hui d'intérêt en optimisation industrielles, et en particulier, l'optimisation robuste, multicritère, en présence d'incertitudes.
Le cours illustre ensuite la place de l'optimisation dans les principaux algorithmes d'apprentissage mathématique (machine learning). Ces questions sont illustrées par des exemples de problèmes de classification et de régression en apprentissage supervisé. Ces exemples sont l'occasion de discuter des questions de métriques et de procédures pour l'évaluation de l'apprentissage, de la validation et de l'inférence (crossfold, overfitting, etc).
Le cours présente les différentes classes d'apprentissage : non-supervisé, supervisé, par transfert, par renforcement, incrémental, etc. Les questions autour de la gestion des bases de données sont abordées : génération, imputation, visualisation, découpage. Le cours présente les liens entre l'apprentissage mathématique par transfert (transfer learning) et la simulation numérique pour adresser les questions de génération de bases de données synthétiques, d'imputation, de prédiction non-intrusive, d'inférence rapide, etc.
Le cours comporte une partie importante de projets informatiques au fil de l'eau. Toutes les séances ont lieu en environnement informatisé et permettent une mise en uvre immédiate des éléments théoriques.

Objectifs : Faire le lien entre optimisation numérique et apprentissage mathématique. Découvrir la machine learning à travers des exemples concrets.
Pré-requis nécessaires : Bases d'analyse, solutions numériques des équations différentielles ordinaires, algèbre linéaire numérique, expériences en programmation en langage interprété.

Pré-requis recommandés : Cours L3 semestre 2 d'optimisation. Programmation en Python.

Semestre 2

Unité d'Enseignement	Volume horaire	ECTS
Analyse numérique 3	23 CM, 15 TD, 7.5 TP	7
Programmation	21 CM, 21 TP	7
Mécanique	21 CM, 21 TD	7
Géométrie différentielle	21 CM, 21 TD	5
Projet	-	4

CM : Cours magistraux, TD : Travaux dirigés, TP : Travaux pratiques

2.1 Programmation

Description : Ce cours porte sur les aspects de base du langage C++ appliqués à l'analyse numérique..

Objectifs : Organiser, compiler, exécuter des codes C++ en lien avec des thématiques d'analyse numérique.
Pré-requis nécessaires : Cours d'Analyse Numérique de Licence (résolution d'équations non-linéaires, analyse numérique des edo, intégration numérique, interpolation, analyse numérique matricielle).

Pré-requis recommandés : Cours d'Analyse Numérique du premier semestre de la formation. Notions de programmation.

2.2 Mécanique

Description : Ce cours de 42h donne les éléments de base de la mécanique des milieux continus : on étudie ainsi les mouvements, les déformations et les champs de contraintes au sein de milieux que l'on considère d'un point de vue macroscopique, par opposition à une description corpusculaire. Plus précisément on analyse ces phénomènes physiques en les décrivant d'un point de vue mathématique.

Objectifs : Acquérir les bases de la modélisation physique de problèmes issus des sciences de l'ingénieur tels le calcul déstructures, les procédés de fabrication, la biomécanique, la mécanique des fluides, le génie civil, le design de nouveaux matériaux.

Pré-requis nécessaires : Avoir suivi un parcours de Licence en mathématiques.

Pré-requis recommandés : Avoir suivi un cours de base en mécanique des milieux rigides si possible.

2.3 Analyse numérique 3

Description : Les éléments finis sont une méthode numérique très utilisée. Ce cours exposera les principes de la méthode, donnera les équations utiles sur des problèmes variés et donnera les clés pour la mise-en-oeuvre informatique de la méthode.

Objectifs : Découvrir les bases de la méthode des éléments finis et aborder les différents types d'éléments finis (Lagrange, Hermite, Raviart-Thomas, Crouzeix Raviart). De nombreux problèmes (Laplacien, élasticité linéaire, Stokes, problèmes non conformes) seront traités et illustrés numériquement à l'aide d'un logiciel scientifique.

Pré-requis nécessaires : Les notions nécessaires sont développés lors du premier semestre de la formation.

Pré-requis recommandés : Notions de programmation sur un logiciel scientifique.

2.4 Géométrie différentielle

Description :

1. Courbes du plan et de l'espace : courbure d'une courbe du plan, courbure et torsion d'une courbe de l'espace.
2. Révisions de calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$.
3. Accroissements finis, inversion locale, fonctions implicites, formes normales des immersions et des submersions. Applications : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, exemples standards, espace tangent, orientation.
4. Surfaces dans $\mathbb{R}^3$, seconde forme fondamentale, courbure.
5. Applications différentiables, valeurs régulières, théorème de Brown et applications.
6. Champs de vecteurs et flots.

Le cours sera illustré par des applications, au choix de l'enseignant. Exemples (non exhaustif) :

- Minoration de la courbure totale des courbes nouées
- Preuve du théorème de Jordan dans le plan
- Théorème de Gauss-Bonnet sur les surfaces
- Notion de variété abstraite avec exemples standards : les espaces projectifs, les grassmanniennes.

Objectifs : Maîtriser des outils de base pour l'étude des variétés différentiables.

Pré-requis : le contenu du cours de L3 "Calcul différentiel et équations différentielles".