Programmes de la licence de maths (LMD5)

Table des matières

Semestre 1

HAX101X – Raisonnement et théorie des ensembles

2 ECTS. 9h CM, 10,5h TD.

Description

Cette UE a pour but d'introduire les outils de logique, de raisonnement, de preuve et de théorie des ensembles utiles aux mathématiques à l'entrée de l'université. Le contexte d'application sont les mathématiques du lycée, et cette UE pourra être l'occasion de manipuler objets et propriétés des domaines : suites, fonctions, ensembles de nombres (entiers, rationnels, décimaux, réels, . . .).

Objectifs

- Bases du discours mathématique, éléments de logique.
- Méthodes de démonstration classiques.
- Vocabulaire ensembliste, opérations ensemblistes, propriétés et et preuves.
- Notions de base sur les applications mathématiques (dont composition, injectivité, surjectivité bijectivité).

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du lycée (notamment logique et raisonnement et preuves), a minima spécialité de première et spécialité mathématiques en terminale ou option mathématiques complémentaires.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du lycée (notamment logique et raisonnement et preuves), idéalement spécialité mathématiques, voire option mathématiques expertes.

HAX102X – Algèbre I : systèmes linéaires

5 ECTS. 24h CM, 25,5h TD.

Description

Cette UE est une introduction à l'algèbre linéaire (formalisée au S2) qui se base sur l'intuition issue de la géométrie du plan et de l'espace. Cela inclut une introduction au calcul matriciel. L'UE introduit aussi le langage de base des polynômes.

Objectifs

- Géométrie du plan et de l'espace :
  - Points, vecteurs, translation par un vecteur, combinaisons linéaires, colinéarité, indépendance, bases, repères et coordonnées, changement de repère, barycentres.
  - Droites et plans (sans coordonnées puis avec), positions relatives, intersections, équations.
  - Transformations linéaires et affines classiques : homothéties, translations, symétries, projections du plan et de l'espace.
  - Incursion en géométrie euclidienne : produit scalaire, orthogonalité, distance, produit vectoriel, bases et repères orthonormés, projections orthogonales, distance d'un point à une droite/un plan.
- Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R}^n$:
  - Points et vecteurs de $\mathbb{R}^n$, sous-espaces affines et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, expression paramétrique et équations, sev engendré par une famille de vecteurs, sea engendré par un point et un sev.
  - Systèmes linéaires et méthode du pivot : systèmes, ensembles de solutions, matrice d'un système, systèmes échelonnés et échelonnés réduits, opérations élémentaires, méthode du pivot.
  - Calcul matriciel : opération sur les matrices, matrices des opérations élémentaires sur les lignes.
  - Applications linéaires de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R}^n$.
  - Inversibilité d'une matrice et méthode de Gauss–Jordan.
- Polynômes à coefficients réels :
  - Définitions d'un polynôme et d'une fonction polynomiale, liens.
  - Coefficients, degré, racines, opérations.
  - Factorisation et division euclidienne de polynômes.
  - Multiplicité des racines, lien à la dérivée, formule de Taylor pour les polynômes.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du lycée (notamment géométrie du plan et de l'espace, et résolution d'équations), a minima spécialité de première et spécialité mathématiques en terminale ou option mathématiques complémentaires.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du lycée (notamment géométrie du plan et de l'espace, et résolution d'équations), idéalement spécialité mathématiques, voire option mathématiques expertes.

HAX103X – Analyse I : fonctions d'une variable et suites

5 ECTS. 24h CM, 25,5h TD.

Description

Cette UE a pour but de préciser les notions de limites de suites et de fonctions, d'approfondir l'étude des suites et des fonctions, et d'étudier les notions de continuité et dérivabilité de fonctions, ainsi que d'introduire les principales fonctions "usuelles".

Objectifs

- Limites des suites numériques, borne supérieure, réels.
  - Définitions de la limite (finie ou infinie) d'une suite. Unicité de la limite.
  - Opérations élémentaires sur les limites. Limites et inégalités.
  - Borne supérieure et borne inférieure.
  - Convergence des suites croissantes majorées (resp. décroissantes minorées). Suites adjacentes.
  - Propriétés de l'ensemble des nombres réels, liens aux rationnels et décimaux.
- Limites des fonctions numériques.
  - Définition de la limite d'une fonction en un point ou à l'infini, unicité.
  - Caractérisations séquentielles. Zoologie des limites : limites épointées, à droite, à gauche, ...
  - Opérations sur les limites. Limites et inégalités. Convergence des fonctions croissantes majorées (resp. décroissantes minorées).
- Continuité des fonctions numériques.
  - Continuité en un point et sur un intervalle. Caractérisation séquentielle.
  - Opérations sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires et applications, théorème de la bijection (applications continues monotones).
  - Limites et continuité des fonctions usuelles. Limites par "croissances comparées".
  - Théorème des bornes atteintes : une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes (admis).
- Dérivabilité.
  - Taux d'accroissement, dérivée, opérations sur les dérivées. Tangente au graphe d'une fonction en un point. Liens dérivabilité-continuité.
  - Dérivée à gauche, à droite. Dérivée des fonctions usuelles : polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, logarithme, fonctions puissance et racine n-ième, fonctions trigonométriques, trigonométrie hyperbolique.
  - Lemme de Rolle, théorème des accroissements finis. Applications : liens entre signe de la dérivée et monotonie, justification des tableaux de variations.
  - Étude des fonctions trigonométriques inverses.

- Asymptotes et convexité.
  - Droites asymptotes à un graphe de fonction : asymptotes verticales, asymptotes obliques. Dérivées d'ordre supérieur, formule de Leibniz.
  - Initiation à la convexité, définition, interprétation en termes de la position relative du graphe et de ses cordes. Caractérisation par la dérivée ou la dérivée seconde.
  - Inégalité arithmético-géométrique. Position relative du graphe par rapport aux tangentes ou aux asymptotes.
- Les fonctions usuelles suivantes seront présentées : fonctions puissances entières et leurs réciproques, racines n-ièmes ; différents logarithmes, exponentielles et les puissances non-entières ; les fonctions trigonométriques : cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan ; fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du lycée (notamment suites et fonctions), et a minima spécialité de première et spécialité mathématiques en terminale ou option mathématiques complémentaires.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du lycée (notamment suites et fonctions), idéalement spécialité mathématiques, voire option mathématiques expertes.

HAX104X – Géométrie dans le plan, l'espace, et le plan complexe

4 ECTS. 19,5h CM, 19,5h TD.

Description

Cette UE vise à travailler la géométrie du plan, ses objets mais aussi les démonstrations. L'UE vise aussi à introduire les nombres complexes. Les parties géométries et nombres complexes représentent chacune la moitié de l'UE.

- objets de la géométrie plane : points, droites, vecteurs, angles, cercles, triangles, etc.
- transformations géométriques du plan : symétries, homothéties, rotations, translations.
- travail sur la démonstration mathématique.
- introduction des nombres complexes, interprétation géométrique, calcul avec les nombres complexes.

Objectifs

Le cours s'appuie sur les notions vues au collège/lycée. Il ne s'agit aucunement d'une approche axiomatique. Les parties géométries et nombres complexes représentent chacune la moitié de l'UE.

- Géométrie du plan.
  - Propriétés élémentaires des droites, vecteurs, angles, distance admises. Définitions de cercles, triangles, transformations, ...
  - Thalès et Pythagore. Théorème des milieux, somme des angles dans un triangle.
  - Les trois cas d'égalité des triangles, triangles semblables. Caractérisation des parallélogrammes.
  - Sinus, cosinus et trigonométrie. Théorème de Pythagore généralisé et théorème des sinus dans un triangle. Formulaire de la trigonométrie.
  - Concourances classiques.
  - Cercle, positions d'une droite par rapport à un cercle, tangentes. Cercle inscrit et circonscrit. Théorème de l'angle inscrit.
- Nombres complexes.
  - Nombres complexes : notation algébrique ; point de vue géométrique, affixe, opérations.
  - Conjugué et module ; calcul de l'inverse ; calcul des racines carrées.
  - Formules d'Euler ; exponentielle imaginaire ; argument et notation exponentielle.
  - Trigonométrie avec les complexes, Cercle trigonométrique, formulaire de la trigonométrie.
  - Calcul du produit et de l'inverse (en notation exponentielle) ; racines n-ièmes de l'unité, d'un complexe quelconque ; somme des racines n-ièmes de l'unité ; résolution des équations du second degré.
  - Isométries du plan. Classification, forme complexe des isométries du plan. Homothéties. Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du lycée (notamment géométrie), et a minima spécialité de première et spécialité mathématiques en terminale ou option mathématiques complémentaires.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du lycée (notamment géométrie), idéalement spécialité mathématiques, voire option mathématiques expertes.

HAX105X – Remédiation en mathématiques

3 ECTS. 27h TD.

Description

L'objectif de cette UE est une remise à niveau "sortie lycée" pour des étudiantes et étudiants n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques en terminale (mais pouvant avoir suivi l'option mathématiques complémentaires).

Objectifs

L'objectif est de faire travailler :

- Traduction en équations et résolution d'équations.
- Études de fonctions.
- Rédaction et organisation des calculs, résolutions d'équations, études de fonctions.
- Interprétation géométrique des résultats, tracé de courbes.
- Articulation raisonnement et calcul.

Le programme donne un cadre pour atteindre cet objectif, tout en introduisant les contenus nécessaires. Il ne s'agit de travailler ces contenus avec des définitions "type" lycée, puisqu'ils seront repris, de façon approfondie dans l'UE Analyse I notamment.

Contenus :

- Résolution d'équations, calculs élémentaires.
- Fonctions usuelles :
  - retour sur les fonctions connues : polynômes, inverse, fractions rationnelles, ln, exp.
  - nouvelles fonctions : sin et cos.
  - Croissance, parité, périodicité.
  - Étude de fonctions, tracé de courbes représentatives et interprétations géométrique des propriétés (à développer au fur et à mesure du travail sur limite, dérivation, primitives et intégration).
- Limites :
  - Limites des fonctions de références, opérations sur les limites.
  - Comparaisons et encadrement, théorème des gendarmes, limites des fonctions monotones, croissances comparées.
  - Formes Indéterminées, contre-exemples.
  - Travail sur la mise en forme adéquate des expressions des fonctions.
- Dérivation :
  - Dérivation des fonctions usuelles, opérations.
  - Dérivée d'une composée.
  - Propriétés des courbes, tableau de variation.

- Primitives et intégration :
  - Primitives des fonction usuelles.
  - Calcul d'intégrales et aires.
  - Calcul d'intégrales : Chasles, primitives, intégration par parties, changement de variable.
  - Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du lycée, a minima spécialité de première et de préférence option mathématiques complémentaires.

Pré-requis recommandés

Non pertinent (UE de remise à niveau).

HAX106X – Calculus

3 ECTS. 27h TD.

Description

Cette UE a pour but de faire retravailler certains concepts d'analyse du lycée, en les approfondissant, et en développant la pratique du calcul et l'interprétation des calculs.

Objectifs

Les contenus du lycée qui sont revisités sont ceux de l'UE Remédiation : fonctions usuelles, limites, dérivation, primitives et intégration.

Ces contenus sont travaillés et approfondis à partir de deux thèmes : étude élémentaires de courbes et de surfaces, et équations différentielles.

Il ne s'agit pas de développer des outils théoriques ou des techniques avancées, mais d'étudier et comprendre les objets à travers l'étude d'exemples.

Il s'agit aussi de travailler les mêmes objectifs :

- Traduction en équations et résolution d'équations.
- Études de fonctions.
- Rédaction et organisation des calculs, résolutions d'équations, études de fonctions.
- Interprétation géométrique des résultats, tracé de courbes.
- Articulation raisonnement et calcul.

Contenus :

- Révisons :
  - Fonctions usuelles.
  - Limites.
  - Dérivation.
  - Primitives et calcul d'intégrales.
- Études élémentaires de courbes et de surfaces :
  - Courbes représentatives de fonctions, propriétés géométriques.
  - Fonctions de plusieurs variables, définition de dérivée partielle.
  - Courbes paramétrées dans le plan et dans l'espace.
  - Surfaces de l'espace.
  - Lignes de niveau.
- Équations différentielles :
  - Intégration et primitives, Intégration par parties et changement de variable.
  - Équations différentielles linéaires d'ordre 1.
  - Exemple d'études d'équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2.
  - Étude des solutions.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du lycée, a minima spécialités de première et de terminale.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du lycée, spécialité de terminale et option mathématiques expertes.

Semestre 2

HAX201X – Analyse II : Suites, séries, développements limités

6 ECTS. 30h CM, 30h TD.

Description

Cette UE fait suite à l'UE de S1 (Analyse I) où on été introduits continuité et dérivabilité des fonctions réelles, fonctions usuelles, et l'étude des suites réelles.

L'objectif est de poursuivre et d'approfondir le travail sur les suites et fonctions, et d'introduire l'étude des séries numériques.

Objectifs

- Suites numériques :
  - Relation de comparaison sur les suites (petit o, grand O, équivalent).
  - Limite sup/limite inf, notion de valeur d'adhérence, suite de Cauchy (exemple de suite de Cauchy de rationnels qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$).
  - Théorème de Bolzano–Weierstrass.
  - Étude de suites récurrentes ($u_{n+1} = f(u_n)$).
- Fonctions réelles :
  - Relation de comparaison (petit o, grand O, équivalent).
  - Développements limités et formule de Taylor–Lagrange, Taylor–Young, développements limités usuels, opérations, applications des développements limités aux calculs de limites, inégalités usuelles, position relative d'une courbe par rapport à sa tangente, étude asymptotique.
  - Régularité des fonctions : théorème des bornes atteintes, continuité uniforme, fonctions lipschitziennes, théorème de Heine.
- Étude des séries numériques :
  - Séries géométriques et télescopiques, cas simple avec calcul explicite des sommes partielles.
  - Séries positives (relation de comparaison, séries de Riemann, critère de Cauchy/d'Alembert, critère de condensation, séries de Bertrand).

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du S1, et en particulier Analyse I, Raisonnement et théorie des ensembles, et Calculus ou Remédiation.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du S1.

HAX202X – Algèbre II : Espaces vectoriels et applications linéaires

6 ECTS. 30h CM, 30h TD.

Description

Cette fait suite à l'UE de S1 (Algèbre I) où ont été introduits algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R}^n$, calcul matriciel et polynômes à coefficients réels.

L'objectif est d'introduire quelques concepts élémentaires de structure algébrique, et approfondir le travail sur les espaces vectoriels et les applications linéaires, ainsi que les polynômes.

Objectifs

- Les structures en algèbre.
  - Loi de composition interne sur un ensemble.
  - Notion d'associativité, de commutativité, d'élément neutre, d'inverse.
  - Notion de groupe, d'anneau et de corps.
  - Calcul dans un anneau. Identités remarquables et formule du binôme.
  - Exemples ($\mathbb{C}$ est un corps, racines de l'unité, groupe des permutations, anneau des polynômes et des endomorphismes/matrices, groupe des automorphismes/matrices inversibles et sous-groupe des isométries, etc.)
- La structure d'espace vectoriel.
  - Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Cas $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, espace des suites réelles, espace des fonctions numériques.
  - Combinaisons linéaires et colinéarité.
  - Sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel engendré par une partie, familles génératrices, familles libres, bases, dimension, théorème de la base incomplète et de l'échange.
  - Somme et somme directe de sous-espaces, supplémentaire.
  - Rang d'une famille de vecteurs.
  - Formule de Grassmann.
- Applications linéaires.
  - Noyau et image.
  - Correspondance application linéaire matrice avec toutes les propriétés usuelles.
  - Changement de base.
  - Invariance de la trace par changement de base et définition de la trace d'un endomorphisme, $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.
  - Isomorphisme et application linéaire réciproque. Groupes $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}(n)$.
  - Projection, symétrie, homothétie.

- Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice. Théorème du rang. Invariance du rang par composition/multiplication par des matrices inversibles.
- Forme échelonnée réduite d'une matrice, opérations élémentaires.
- Retour sur les systèmes linéaires, lien rang d'une matrice/nombre de pivots de sa forme échelonnée réduite, dimension du noyau/nombre de variables libres.

• Polynômes.
  - Retour sur $\mathbb{K}[X]$, vu comme espace vectoriel.
  - Cas de $\mathbb{K}_n[X]$: changement de bases, décomposition des polynômes dans des bases du type 1, $X - a$,$(X - a)^2, \ldots$
  - Preuve de a racine de P ssi il existe Q tel que $P = (X - a)Q$.
  - Formule de Taylor, caractérisation de la multiplicité des racines.
  - Polynômes interpolateur de Lagrange.
  - Substitution de l'indéterminée.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du S1, et en particulier Algèbre I, Géométrie dans le plan et plan complexe, et Raisonnement et théorie des ensembles.

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du S1.

HAX203X – Arithmétique et dénombrement

6 ECTS. 30h CM, 30h TD.

Description

Cette UE vise à présenter les concepts élémentaires d'arithmétique et de dénombrement utiles pour le début de la licence en mathématiques.

Objectifs

- Dénombrement élémentaire.
  - Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal et opérations ensemblistes. Cardinal et applications injectives, surjectives, bijectives. Cardinal d'un ensemble d'applications. Nombre de parties d'un ensemble. Fonction indicatrice.
  - Introduction aux cardinaux infinis. Bijection entre ensembles. Dénombrabilité. Argument diagonal de Cantor. X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas le même cardinal. $\mathbb{R}$ est indénombrable.
  - Arrangements, permutations, combinaisons (coefficients binomiaux), triangle de Pascal, formule du binôme.
  - Formule du crible générale (application au dénombrement des dérangements, des surjections, etc.).
  - Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, partition en classes d'équivalence, quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence (exemples sur des ensembles déjà connus). Relation d'ordre, partiel, total, exemples.
  - Applications à des exemples de probabilités élémentaires finies (nombre de cas favorables/nombre de cas total).
- Arithmétique élémentaire dans $\mathbb{Z}$.
  - Nombres entiers, écriture dans une base.
  - Divisibilité, nombres premiers (infinitude, algorithme du crible). Division euclidienne (algorithme d'Euclide).
  - PGCD et PPCM. Théorème de Bézout (et algorithme d'Euclide étendu), nombres premiers entre eux, lemme d'Euclide, lemme de Gauss. Équations diophantiennes $ax + by = c$. Décomposition en produit de nombres premiers. Application : pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est soit un entier soit irrationnel.
  - Arithmétique modulaire (congruences). Petit théorème de Fermat. Théorème chinois des restes.
  - Étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, vu comme anneau. Inversibles, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier. Réinterprétation du théorème de Bézout. Réinterprétation du petit théorème de Fermat (définition de l'indicatrice d'Euler, théorème d'Euler). Réinterprétation du théorème chinois des restes.
  - Illustration par la cryptographie.

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du S1 (principalement Raisonnement et théorie des ensembles) et programmes de mathématiques du lycée (a minima spécialité mathématiques de première)

Pré-requis recommandés

Programme de mathématiques du S1 (principalement Raisonnement et théorie des ensembles) et programmes de mathématiques du lycée (idéalement spécialité mathématiques de terminale, voire option mathématiques expertes.)

Semestre 3

HAX301X – Algèbre III : Réduction des endomorphismes

6 ECTS. 30h CM, 30h TD.

Description

- Groupe symétrique. Notion de groupe, groupe des bijections de X, groupe S_n. Décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Ordre d'une permutation. Transpositions et morphisme de signature.
- Déterminants :
  - Forme n-linéaire alternée (lien avec le volume des parallélogrammes/parallélépipèdes). Déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme. Annulation du déterminant. Multiplicativité. Déterminant et matrice transposée. Développement par rapport à ligne ou colonne. Co-matrice et formule de Cramer. Déterminant de matrices par blocs.
  - Ré-interprétation de l'algorithme du pivot de Gauss : les matrices $I + E_{ij}$ et les permutations engendrent $\mathrm{GL}(E)$. Calcul du déterminant par pivot de Gauss.
- Réduction des endomorphismes :
  - Rappels : changement de bases et matrice de passage, sommes directes de sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables et matrices diagonales par blocs.
  - Vocabulaire propre : valeurs, vecteurs, sous-espaces. Spectre. Polynôme caractéristique.
  - Endomorphisme-matrice diagonalisable-trigonalisable. Caractérisations par le polynôme caractéristique.
  - Espaces caractéristiques, lemme des noyaux emboités, endomorphismes nilpotents.
- Polynômes d'endomorphismes :
  - Morphisme d'évaluation. Polynôme minimal d'un endomorphisme. Théorème de Cayley–Hamilton (par exemple via les matrices compagnons).
  - Lemme des noyaux. Caractérisation de diagonalisable-trigonalisable par le polynôme minimal.
  - Décomposition de Dunford. Réduction de Jordan.
- Applications : calcul des puissances d'une matrice, suite récurrentes linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes.

Objectifs

Ce cours abordera les notions de groupe symétrique, déterminants et traitera de la réductions des endomorphismes en dimension finie (jusqu'à la forme de Jordan) et de ses applications. C'est un premier pas vers l'analyse spectrale.

Pré-requis nécessaires

Algèbre linéaire de L1 (HAX102X – Algèbre I : systèmes linéaires et HAX202X – Algèbre II : Espaces vectoriels et applications linéaires) et HAX104X – Géométrie dans le plan, l'espace, et le plan complexe.

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX302X – Analyse III : Intégration et équations différentielles élémentaires

6 ECTS. 30h CM, 30h TD.

Description

- Séries à termes de signe quelconque.
  - Critère de Cauchy, absolue convergence.
  - Autres critères de convergence : règles de Leibniz (des séries alternées) et d'Abel.
  - Utilisation des DL pour prouver la convergence.
  - Étude des restes, vitesse de convergence.
- Intégration.
  - Intégrale d'une fonction en escalier.
  - Fonctions Riemann-intégrables.
  - Primitive et intégrales.
  - Quelques méthodes de calculs (IPP, changement de variables, formules de la moyenne).
  - Sommes de Riemann.
- Équations différentielles.
  - Équations à variables séparables.
  - Linéaires d'ordre 1.
  - Linéaires d'ordre 2 (à coefficients constants).
  - Équations non linéaires (Ricatti, Bernoulli).
- Intégrales généralisées.
  - Définitions : intégrales généralisées convergentes, absolument convergentes, semi-convergentes, divergentes.
  - Le critère de Cauchy.
  - Comparaisons des intégrales généralisées à termes positifs.
  - Critères de convergence absolue.
  - Intégrales semi convergentes.

Objectifs

Ce cours abordera, dans la continuité du cours d'analyse du S2, la notions de séries à termes de signe quelconque. L'intégrale de Riemann sera définie et mise en application pour traiter les équations différentielles notamment linéaires. La partie intégration sera élargie aux intégrales généralisées.

Pré-requis nécessaires

HAX201X – Analyse II : Suites, séries, développements limités

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX303X – Arithmétique des polynômes

3 ECTS. 15h CM, 15h TD.

Description

- Panorama des structures algébriques : groupes, anneaux, corps, algèbres avec des exemples de L1.
- L'algèbre $\mathbb{K}[X]$: définition, opérations, degré, $\mathbb{K}_n[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$:
  - divisibilité, polynômes irréductibles, division euclidienne, algorithme d'Euclide. PGCD et PPCM, théorème de Bézout, lemme de Gauss, décomposition en facteurs irréductibles.
  - Notion d'idéal d'un anneau, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ comme anneaux principaux, ré-interprétation de divisibilité, pgcd, ppcm en termes d'idéaux.
- Fonctions polynomiales :
  - Rappels : racines, multiplicité, dérivation, formule de Taylor, caractérisation de la multiplicité des racines.
  - Polynôme scindé, relation racines-coefficients. Théorème de D'Alembert–Gauss, décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Racines n-ièmes de l'unité.
- Fractions rationnelles : définition comme corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$. Degré, partie entière, décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).

Objectifs

Dans ce cours, on introduira un panorama des structures algébriques (anneau, idéal, corps) avant d'aborder l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ et définir l'arithmétique sur les polynômes en faisant des parallèles avec l'arithmétique des entiers vue en L1. Des parties calculatoires sur les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles seront traitées (factorisations/décompositions explicites).

Pré-requis nécessaires

HAX203X – Arithmétique et dénombrement

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX304X – Probabilités

5 ECTS. 24h CM, 25,5h TD.

Description

- Espaces probabilisés.

  Expériences aléatoires. Événements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste. Tribus. Probabilités.
- Probabilités conditionnelle et indépendance.

  Probabilité conditionnelle ; formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance d'événements ; formule de Poincaré.
- Variables aléatoires discrètes.

  Définition d'une variable aléatoire. Loi de probabilité. Fonction de répartition. Moments. Fonctions de variable aléatoire. Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.
- Variables aléatoires à densité.

  Fonction de répartition, densité. Moments. Fonctions de variable aléatoire. Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale.

Objectifs

Ce cours introduira les espaces probabilisés, les notions de probabilités, d'indépendance et définira les variables aléatoires discrètes et à densité en accentuant sur la modélisation.

Pré-requis nécessaires

Les cours d'analyse de première année (HAX103X – Analyse I : fonctions d'une variable et suites et HAX201X – Analyse II : Suites, séries, développements limités) et HAX101X – Raisonnement et théorie des ensembles, HAX203X – Arithmétique et dénombrement.

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX305X – Analyse numérique élémentaire

3 ECTS. 12h CM, 9h TD, 9h TP.

Description

- Particularités du calcul flottant : précision relative et format IEEE.
- Résolution d'équations non linéaires $f(x) = 0$.
  - Théorème des valeurs intermédiaires, dichotomie.
  - Méthode du point fixe contractant. Vitesse de convergence.
  - Newton et sécante. Vitesse de convergence.
- Interpolation polynomiale.
  - Existence et unicité du polynôme d'interpolation.
  - Erreur d'interpolation, théorème des accroissements finis généralisés.
  - Phénomène de Runge.
  - polynôme de Lagrange, polynôme de Newton et différences divisées.
  - Application à la dérivation numérique.
  - Interpolation d'Hermite.
- Intégration numérique.
  - Méthodes de Newton–Cotes (point milieu, trapèzes, Simpson, etc..).
  - Ordre d'une méthode de quadrature. Estimation d'erreur.
  - Méthode de Monte Carlo.
  - Méthode de Gauss : ordre optimal, exemple de Gauss–Legendre.

Objectifs

Dans ce cours on abordera les particularités du calcul flottant puis on détaillera des méthodes numériques élémentaires usuelles pour résoudre des équations non linéaires, interpoler une fonction et approximer une intégrale. L'étudiant apprendra à implémenter un algorithme de résolution d'un problème d'analyse numérique.

Pré-requis nécessaires

Les cours d'analyse de L1 (HAX103X – Analyse I : fonctions d'une variable et suites et HAX201X – Analyse II : Suites, séries, développements limités) et quelques notions d'algèbre linéaire (HAX102X – Algèbre I : systèmes linéaires) suffisent a intégrer cette UE.

Pré-requis recommandés

L1 maths.

Semestre 4

HAX401X – PPE de mathématiques

2 ECTS.

Description

Ce cours permettra de découvrir au cours de présentation des débouchés, de conférences thématiques et de tables rondes les différents métiers des mathématiques.

Pour les étudiantes et étudiants qui bénéficient d'un contrat AED en pré-professionnalisation, l'UE accompagne leur activité dans l'établissement, en apportant quelques éléments destinés à enrichir leur observation et à leur donner du recul. Il s'agit aussi de préparer la rédaction de travail écrit qu'ils devront remettre.

Objectifs

Rencontre avec des cadres travaillant dans le domaine des sciences appliquées (industries, organismes de recherche), des enseignant·es de plusieurs niveaux différents, d'ancien·nes diplômé·es afin de découvrir les différents métiers des mathématiques.

Pré-requis nécessaires

Aucun.

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX402X – Algèbre IV : Espaces euclidiens

6 ECTS. 30h CM, 30h TD.

Description

- Espaces euclidiens :
  - Produit scalaire, Cauchy–Schwarz, norme et distance euclidienne, inégalité triangulaire, égalité du parallélogramme, théorème de Pythagore. Base orthonormale.
  - Algorithme d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Angles de vecteurs, angles de droites, théorème de l'angle au centre et cocyclicité. Sous-espaces orthogonaux.
  - Déterminant dans une base orthonormale et volume. Orientation.
  - Projections orthogonales (application à la méthode des moindres carrés).
  - Isométries linéaires, matrices orthogonales, groupe orthogonal et spécial orthogonal. Exemples d'isométries : rotations, symétries. Classification des isométries en dimension 2 et 3.
  - Isométries préservant un polygone régulier du plan.
- Dualité.

  Définition du dual et du bidual. Orthogonal d'un sous-espace (au sens de la dualité), base duale, base antéduale. Correspondance hyperplans/formes linéaires, dualité entre description paramétrique et description cartésienne d'un sous-espace. Adjoint d'un endomorphisme. Ecriture matricielle, lien avec la transposée.
- Formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  - Matrice d'une forme bilinéaire. Forme bilinéaire comme applications linéaire entre l'espace et son dual. Noyau et rang d'une forme bilinéaire. Vecteurs isotropes. Forme quadratique. Existence de bases orthogonales. Algorithme de réduction de Gauss. Théorie d'inertie de Sylvester, signature d'une forme quadratique. Classification des formes quadratiques réelles.
  - Interprétation de la dualité dans un espace euclidien. Endomorphismes symétriques et orthogonaux dans un espace euclidien. Lien avec l'adjoint. Forme quadratique associée. Diagonalisation des matrices symétriques dans une base orthonormale. Diagonalisation simultanée de deux formes symétriques dont l'une est définie positive.
- Formes sesquilinéaires hermitiennes et espaces hermitiens.

  Reprise des notions vues dans le cas réel : définition, matrice, forme quadratique hermitienne, signature et théorème d'inertie de Sylvester dans ce cadre. Espaces hermitiens, définitions, similarités et différences avec les espaces euclidiens, groupe unitaire, endomorphismes autoadjoints. Notion de complexification et de formes réelles.
- Endomorphismes normaux.

  Réduction, avec applications aux matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales, unitaires, autoadjointes.

Objectifs

Ce cours est une introduction à l'algèbre bilinéaire et abordera les espaces euclidiens, hermitiens. Il traitera tout ce qui est isométries, dualité, formes quadratiques et endomorphismes.

Pré-requis nécessaires

L'algèbre linéaire de L1 (HAX102X – Algèbre I : systèmes linéaires et HAX202X – Algèbre II : Espaces vectoriels et applications linéaires) et HAX301X – Algèbre III : Réduction des endomorphismes.

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX403X – Analyse IV : Suites de fonctions, séries entières, Fourier

8 ECTS. 38,5h CM, 38,5h TD.

Description

- Suites de fonctions.
  - Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonction.
  - Définitions et lien entre convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions.
  - Critère de Cauchy uniforme.
  - Théorèmes de Dini.
  - Théorème de Stone–Weierstrass par les polynômes de Bernstein.
  - Stabilité de la continuité (resp. dérivabilité, intégration) par convergence uniforme.
- Séries de fonctions.
  - Convergences simple et uniforme.
  - Convergence normale.
  - Continuité, dérivabilité, intégrabilité d'une série de fonctions.
- Séries entières.
  - Définitions, rayon de convergence, formule de Hadamard, règle de d'Alembert.
  - Propriétés de la somme de la série entière : continuité, dérivabilité, intégrabilité.
  - Fonctions développables en série entière.
  - Applications a la résolution des équations différentielles : résolution par série entiere et exponentielle de matrices.
- Séries de Fourier.
  - Pourquoi les séries de Fourier ? (problématique et définitions)
  - Convergences (en moyenne quadratique, simple, normale) des séries de Fourier.
  - Applications aux calculs de certaines séries et aux équations différentielles.

Objectifs

Ce cours abordera les notions de suites et séries de fonctions et les diverses convergences. Les séries entières et de Fourier seront également développées.

Pré-requis nécessaires

- HAX201X – Analyse II : Suites, séries, développements limités
- HAX302X – Analyse III : Intégration et équations différentielles élémentaires

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables

5 ECTS. 24h CM, 25,5h TD.

Description

- Topologie sur $\mathbb{R}^n$.
  - Normes standard 1, 2 et ∞ et équivalence de ces normes. Notions d'ouverts et fermés, voisinages. Définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, continuité en termes d'ouverts et de voisinages.
  - Limites de suites et compacité dans $\mathbb{R}^n$, caractérisation de fermés par les suites.
- Fonctions de plusieurs variables. (La notion de différentiabilité sera vue qu'en L3.)
  - Dérivées directionnelles, dérivées partielles. Réprésentation, courbes de niveaux. Gradient d'une fonction à valeurs réelles, DL1 si dérivées partielles continues. Inégalité des accroissements finis.
  - Hessienne, DL2, théorème de Schwarz.
  - Optimisation de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Extrémas libres. Notion de point critique. Extremum local, définition et condition nécessaire. Conditions nécessaires et suffisantes pour les extrema locaux. Exemples.
  - Méthodes des moindres carrés.
- Courbes paramétrées.
  - Dérivées de fonctions composées. Définition, point de vue cinématique, exemples, représentation. Vecteur tangent, longueur de courbes $\mathcal{C}^1$. Reparamétrage. Etude locale de courbes.
  - Dérivations des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ (exponentielle, somme, produit, quotient).

Objectifs

Dans ce cours sera abordée une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$, les notions de base de calcul différentiel des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et en optimisation. Les courbes paramétrées seront également traitées.

Pré-requis nécessaires

Un cours d'analyse des fonctions d'une variable réelle de L1 (HAX103X – Analyse I : fonctions d'une variable et suites).

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX405X – Statistique

3 ECTS. 12h CM, 9h TD, 9h TD.

Description

- Statistique univariée et intervalle de confiance, dispersion, valeur centrale.
- Liaison et statistiques bivariées, corrélation linéaire ; variance inter/var total, ϕ^2.
- Introduction à la statistique multivariée : nuage de point, espace euclidien, classification automatique.

Objectifs

Introduction dans ce cours des principaux concepts statistiques (représentation graphique de données, indicateurs de tendance centrale et de dispersion, relation entre deux variables, intervalles de confiance).

Pré-requis nécessaires

Cours de probabilité du premier semestre.

Pré-requis recommandés

L1 maths.

HAX406X – Algèbre linéaire numérique

4 ECTS. 15h CM, 10,5h TD, 15h TP.

Description

- Résolution numérique de systèmes linéaires (problématique, questions de stabilité et complexité algorithmique) :
  - matrice d'opérations élémentaires, factorisation LU et Choleski.
  - Normes matricielles, conditionnement.
  - Méthodes itératives : Jacobi, Gauss–Seidel.
  - Analyse de convergence : rayon spectral.
- Systèmes surdéterminés : méthodes des moindres carrés et applications.
- Décomposition de valeurs singulières et applications.
- Calcul de valeurs propres. Localisation, lien avec le polynôme caractéristique. Méthodes de la puissance et de déflation.

Objectifs

Ce cours abordera les méthodes numériques appliquées à l'algèbre linéaire et plus particulièrement aux matrices. Les notions de conditionnement, décompositions matricielles et méthodes itératives, et de calcul de valeurs propres seront introduites.

Pré-requis nécessaires

- HAX102X – Algèbre I : systèmes linéaires
- HAX202X – Algèbre II : Espaces vectoriels et applications linéaires
- HAX305X – Analyse numérique élémentaire

Pré-requis recommandés

L1 maths.

Semestre 5

HAX501X – Groupes et anneaux 1

6 ECTS. 27h CM, 27h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Théorie des groupes.
  - Notion de groupe, sous-groupe et morphismes de groupes. Produit de groupes. Exemples.
  - Sous-groupe engendré par une partie, sous-groupe cyclique. Ordre d'un élément dans un groupe, théorème de Lagrange, indice d'un sous-groupe.
  - Étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: théorème chinois des restes, petit théorème de Fermat, théorème de Wilson. Générateurs et sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, indicatrice d'Euler, théorème d'Euler.
  - Étude du groupe diédral. Étude du groupe symétrique et alterné.
- Théorie des anneaux.
  - Notion d'anneau, d'anneau intègre, de corps. Produit d'anneaux. Groupe des inversibles d'un anneau. Algèbres sur un corps. Exemples.
  - Sous-anneau, sous-anneau engendré par une partie. Morphismes d'anneaux. Corps des fractions d'un anneau intègre.
  - Caractéristique d'un anneau, morphisme de Frobenius, cas des corps finis.
  - Idéal d'un anneau commutatif, idéal principal, anneau principal.
  - Divisibilité dans les anneaux intègres : éléments irréductibles et premiers, PGCD, PPCM. Anneaux principaux, anneaux euclidiens, anneaux factoriels.
  - Lemme de Gauss et hérédité de la factorialité.

Objectifs

Acquérir les notions de base des théories des groupes et des anneaux et les illustrer sur des exemples.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'algèbre de L1 et L2, en particulier : HAX303X – Arithmétique des polynômes.

Pré-requis recommandés

L2 maths.

HAX502X – Calcul différentiel et équations différentielles

6 ECTS. 27h CM, 27h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Calcul différentiel.
  - Définition de la différentielle, inégalité des accroissements finis, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Taylor.
  - Notion de difféomorphisme, théorème d'inversion locale, inversion globale, théorème des fonctions implicites.
- Équations différentielles.
  - Solution maximale, globale, théorème de Cauchy–Lipschitz, explosion en temps fini, théorème de Cauchy–Lipschitz global, théorème de sortie de tout compact.
  - Équations différentielles linéaires : théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire, systèmes linéaires à opérateur constant, systèmes linéaires généraux.
  - Équations autonomes et champs de vecteurs : flot et courbe intégrale d'un champ de vecteurs, équilibre stable et instable. Systèmes différentielles autonomes de taille 2.

Objectifs

Dans une première partie : approfondir les notions de base du calcul différentiel vues en L2. Dans une seconde partie : introduire l'étude qualitative des équations différentielles.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse de L1 et L2, en particulier :

- HAX302X – Analyse III : Intégration et équations différentielles élémentaires
- HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables

Pré-requis recommandés

L2 maths.

HAX503X – Mesure et intégration, Fourier

8 ECTS. 36h CM, 36h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Théorie générale de la mesure : espaces mesurables, applications mesurables et espaces mesurés.
- Théorie générale de l'intégration : intégrales des fonctions étagées, des fonctions mesurables positives puis des fonctions réelles ou complexes. Théorèmes de convergence monotone et dominée. Continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre.
- Exemples de mesures : les mesures image et le théorème de transfert, la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, les mesures produit et le théorème de Fubini.
- Espaces L^p : inégalités de Hölder et Minkowski, définition des espaces L^p. Produit de convolution et théorèmes de densité pour les espaces L^p sur $\mathbb{R}^n$.
- Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$: définition et propriétés, formule d'inversion, exemple d'utilisation.

Objectifs

Acquérir les bases de la théorie de la mesure et de l'intégration, puis utiliser ces bases pour introduire les espaces et les outils de l'analyse fonctionnelle.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse de L1 et L2, en particulier :

- HAX403X – Analyse IV : Suites de fonctions, séries entières, Fourier
- HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables

Pré-requis recommandés

L2 maths.

HAX504X – Combinatoire énumérative

4 ECTS. 18h CM, 18h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Dénombrement.
  - Notion de cardinal. Nombre d'applications entre deux ensembles finis, nombre de parties d'un ensemble fini. Nombre d'arrangements, nombre de permutations. Coefficients binomiaux.
  - Formule du crible générale et applications.
  - Nombres de Stirling de première et seconde espèce.
  - Ensembles partiellement ordonnés et fonction de Möbius. Application à l'arithmétique.
- Théorie des graphes.
  - Notion de graphe. Degré. Chemins, chaînes, cycles. Connexité.
  - Graphes eulériens et hamiltoniens. Graphes bipartites.
  - Isomorphismes, groupes d'automorphismes.
  - Matrice d'adjacence, spectre et propriétés.
  - Arbres, formule de Cayley. Arbres couvrants, algorithme de Kruskal.
  - Coloriage, polynôme chromatique.
  - Planarité, formule d'Euler. Théorème des six couleurs.

Objectifs

Dans une première partie, approfondir les notion de base du dénombrement vues en L1 et L2. Dans une seconde partie, introduire l'étude combinatoire des graphes.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'algèbre de L1 et L2, en particulier : HAX203X – Arithmétique et dénombrement.

Pré-requis recommandés

L2 maths.

HAX505X – Mesure et intégration

4 ECTS. 18 CM, 18 TD.

Description

Cette UE est suivie uniquement par les étudiants inscrits en bi-licence Maths-Info. Elle consiste à suivre la première moitié de l'UE HAX503X – Mesure et intégration, Fourier, et aborde les points suivants :

- Théorie générale de la mesure : espaces mesurables, applications mesurables et espaces mesurés.
- Théorie générale de l'intégration : intégrales des fonctions étagées, des fonctions mesurables positives puis des fonctions réelles ou complexes. Théorèmes de convergence monotone et dominée. Continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre.
- Exemples de mesures : les mesures image et le théorème de transfert, la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, les mesures produit et le théorème de Fubini.

Objectifs

Acquérir les bases de la théorie de la mesure et de l'intégration.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse de L1 et L2, en particulier :

- HAX403X – Analyse IV : Suites de fonctions, séries entières, Fourier
- HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables

Pré-requis recommandés

L2 maths.

HAX506X – Théorie des probabilités

4 ECTS. 18h CM, 18h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Modélisation probabiliste : espace de probabilité, loi de probabilité, formule de Bayes, indépendance d'événements et de tribus.
- Variables aléatoires : définition, exemples, lois usuelles, indépendance. Fonction de répartition pour les variables et les vecteurs aléatoires. Espérance. Fonction caractéristique.
- Loi des grands nombres : loi du 0-1, convergence presque sure et en probabilité. Application à l'estimation ponctuelle.
- Théorème Central Limite : convergence en loi, comparaison avec les autres convergences. Application du théorème central limite à l'estimation par intervalles.

Objectifs

Illustrer avec un point de vu probabiliste les notions vue dans l'UE HAX503X – Mesure et intégration, Fourier, et introduire les outils nécessaires aux étudiants qui suivront l'UE HAX603X – Modélisation stochastique au second semestre de L3.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse et de probabilité de L1 et L2, en particulier : HAX304X – Probabilités.

Pré-requis recommandés

L2 maths.

Semestre 6

HAX601X – Topologie des espaces métriques

7 ECTS. 31,5h CM, 31,5h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Espaces métriques et topologiques : définition, limites et continuité. Ouverts, fermés, voisinages. Intérieur et adhérence d'une partie, densité. Topologie produit et topologie quotient.
- Connexité : définition, connexes de $\mathbb{R}$. Image continue d'un connexe. Connexité par arc, convexité dans un espace vectoriel normé. Composantes connexes.
- Compacité : définition. Les compacts de $\mathbb{R}^n$. Image continue d'un compact. Théorème de Bolzano–Weierstrass. Théorème d'Ascoli.
- Complétude : suites de Cauchy dans un espace métriques, définition d'un espace métrique complet. Prolongement des applications, complété d'un espace métrique. Théorème du point fixe.
- Espaces de Banach et de Hilbert : définition, le cas de la dimension fini. Application linéaires continues, dual topologique. Exemples : espaces L^p et $\mathcal{C}^0$. Espaces de Hilbert, projection sur un convexe fermé, dual.

Objectifs

Introduire les notion de base de la topologie et leur utilisation pour l'étude des espaces fonctionnels.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse de L1, de L2 et du premier semestre de L3, en particulier :

- HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables
- HAX502X – Calcul différentiel et équations différentielles

Pré-requis recommandés

Premier semestre de L3.

HAX602X – Analyse complexe

6 ECTS. 27h CM, 27h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Fonctions analytiques : définition, zéros d'une fonction analytique, prolongement analytique, principe du maximum
- Fonctions holomorphes : définition, exemples (dont exponentielle, logarithmes), équations de Cauchy–Riemann, existence de primitive.
- La formule de Cauchy et ses conséquences : indice d'un lacet par rapport à un point, formule de Cauchy dans un convexe, analyticité des fonctions holomorphes.
- Singularités et fonctions méromorphes : pôles et singularités essentielles, fonctions méromorphes, développement en série de Laurent, théorème des résidus.

Objectifs

Introduire les outils de base de l'analyse complexe.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse de L1, de L2 et du premier semestre de L3, en particulier :

- HAX403X – Analyse IV : Suites de fonctions, séries entières, Fourier
- HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables
- HAX502X – Calcul différentiel et équations différentielles

Pré-requis recommandés

Premier semestre de L3.

HAX603X – Modélisation stochastique

5 ECTS. 18h CM, 15h TD, 12h TP.

Description

Cette UE fait suite à l'UE de Théorie des probabilités et elle s'appuiera sur les résultats vus dans cette UE. Elle permettra de compléter les notions en théorie et pratique de l'aléatoire pour aborder un Master de Probabilités et/ou Statistique. Elle traitera les points suivants :

- Partie I : Générer l'aléa.
  - Générateurs pseudo-aléatoires.
  - Simulations de variables aléatoires : méthode d'inversion de la fonction de répartition, méthode du rejet, autres lois (méthode de Box–Muller pour la simulation d'une loi normale, mélanges, simulation d'une variable aléatoire de Poisson à partir de la somme de variables exponentielles indépendantes).
  - Illustrations numériques des principaux résultats du cours de probabilités : loi des grands nombres, théorème de Moivre–Laplace.
- Partie II : Méthode de Monte-Carlo.

  Méthode de Monte-Carlo pour le calcul approché d'une intégrale et réduction de la variance : variables antithétiques, variables de contrôle, échantillonnage préférentiel. Application à la simulation d'événements rares.
- Partie III : Compléments.
  - Vecteurs gaussiens et lien avec les lois usuelles de la statistique inférentielle (Student, χ^2) application à la construction d'intervalles de confiance.
  - Marches aléatoires simples, problème de maximisation de l'espérance d'une fonction de coût en maths financières.

Les TP pour l'implémentation des méthodes numériques seront effectuées à l'aide du logiciel R.

Objectifs

Manipuler les principaux résultats des probabilités d'un point de vue pratique. Renforcer la compréhension des phénomènes aléatoires avec des illustrations numériques. Initier aux méthodes de simulation par la méthode de Monte-Carlo pour la résolution numérique de problèmes d'intégration ou de calcul de probabilité d'événements complexes. Compléter les connaissances des principales lois usuelles et de leur propriété en vue des applications à la statistique inférentielle et aux tests statistiques abordés en Master.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse et de probabilité de L1, L2 et L3, en particulier : HAX506X – Théorie des probabilités.

Pré-requis recommandés

Bases de programmation en R.

HAX604X – Analyse numérique des équations différentielles

5 ECTS. 18h CM, 15h TD, 12h TP.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Méthodes numériques pour les EDO : modélisation, méthode à un pas (Euler, Runge, Heun, RK4), erreur de consistance. Ordre et convergence de schémas. Problèmes raides et stabilité des schémas implicites. Méthodes multipas. stabilité et convergence.
- Introduction aux EDP linéaires et à la modélisation : notions de base, exemples du 1er ordre, classification des EDP du 2nd ordre à coefficients constants. Exemples d'EDP linéaires types, introduction à la résolution numérique par différences finies, illustrations par des exemples.

Objectifs

Acquérir les notions élémentaires en méthodes numériques pour les équations différentielles.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'analyse de L1, de L2 et du premier semestre de L3, en particulier :

- HAX302X – Analyse III : Intégration et équations différentielles élémentaires
- HAX502X – Calcul différentiel et équations différentielles

Pré-requis recommandés

Premier semestre de L3.

HAX605X – Groupes et anneaux 2

5 ECTS. 22,5h CM, 22,5h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Théorie des groupes.
  - Action d'un groupe sur un ensemble, quotient d'un ensemble par une action de groupe. Théorème de Cayley. Formule des classes, formule de Burnside. Application au dénombrement.
  - Les théorèmes de Sylow et applications.
  - Sous-groupe distingué, quotient de groupes. Les théorèmes d'isomorphisme et de factorisation. Groupe simple. Le cas particulier des groupes abéliens.
  - Extensions de groupes et produit semi-direct. Exemples. Le cas particulier des espaces vectoriels.
- Théorie des anneaux.
  - Rappels sur les idéaux, quotient d'un anneau par un idéal. Théorèmes d'isomorphisme et de factorisation. Idéaux d'un quotient. Application du quotient à la construction d'extensions de corps et de (petits) corps finis.
  - Idéaux premiers et maximaux. Opérations sur les idéaux. Le théorème chinois des restes.

Objectifs

Approfondir les notions de base des théories des groupes et des anneaux vues au semestre précédent.

Pré-requis nécessaires

Les UE d'algèbre de L1, de L2 et du premier semestre de L3.

Pré-requis recommandés

Premier semestre de L3.

HAX606X – Optimisation convexe

5 ECTS. 18h CM, 15h TD, 12h TP.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Extrema sans contraintes : notion de convexité, conditions d'optimalité, méthodes de descente, fonctionnelles séparables, gradient stochastique.
- Extrema avec contraintes : formulation forte et faible, extrema liés, multiplicateurs de Lagrange et mise en oeuvre avec Newton. Conditions de KKT, dualité, Uzawa. Programmation linéaire.
- Introduction à l'Apprentissage mathématique.
- Quelques domaines d'applications.

Objectifs

Acquérir les notions élémentaires en optimisation mathématique et ses applications.

Pré-requis nécessaires

UE d'analyse de L1, de L2 et du premier semestre de L3, en particulier :

- HAX404X – Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables
- HAX502X – Calcul différentiel et équations différentielles.

Pré-requis recommandés

Premier semestre de L3.

HAX607X – Géométrie

9 ECTS. 40,5h CM, 40,5h TD.

Description

Cette UE abordera les points suivants :

- Géométrie affine : espaces affines, applications affines, barycentres. Géométrie affine du plan et de l'espace, théorèmes classiques.
- Géométrie affine euclidienne : espaces affines euclidiens, isométries. Géométrie affine euclidienne du plan et de l'espace, théorèmes classiques, utilisation des complexes pour décrire les objets du plan affine euclidien et les isométries.
- Isométries et groupes.

Objectifs

Compléter la formation en géométrie des étudiants qui envisagent de s'engager dans les master MEEF pour passer le CAPES et devenir enseignant de collège où de lycée.

Pré-requis nécessaires

UE d'algèbre et de géométrie de L1 et L2, en particulier : HAX402X – Algèbre IV : Espaces euclidiens.

Pré-requis recommandés

Premier semestre de L3.

HAX608X – Initiation à l'enseignement

5 ECTS. 21h TD.

Description

L'UE est organisée autour d'un stage d'observation d'au moins 18h dans une classe de mathématiques d'un établissement secondaire, sur 6 semaines.

- Initiation à la didactique des mathématiques.
- Observation des classes : activité des élèves et pratiques d'enseignants en mathématiques.
- Observation de la vie d'un établissement.
- Rédaction d'un rapport de stage.

Objectifs

- Permettre aux étudiantes et aux étudiants de découvrir le métier d'enseignant et de s'initier à la didactique des mathématiques.
- Aborder quelques grands thèmes de didactique des mathématiques à partir d'exemples pratiques.
- Entamer un changement de posture sur la question de l'enseignement des mathématiques et apprendre à se poser des questions en lien avec l'enseignement.
- Adopter une posture réflexive face à des questions liées à l'enseignement des mathématiques en secondaire.
- Prendre du recul sur les contenus mathématiques enseignés en secondaire.

Pré-requis nécessaires

Premier semestre de L3.

Pré-requis recommandés

L2 maths.

HAX609X – Compléments pour le CAPES

9 ECTS. 40,5h CM, 40,5h TD.

Description

- Cette UE est l'occasion de compléter le programme de licence tout en mobilisant les outils mathématiques déjà travaillés en L1/L2/L3.
- Cela pourra être l'occasion de mettre en pratique, sur des objets singuliers, les théories travaillées en licence.
- Certaines thématiques importante de licence pourront être revisitées : il faudra veiller à problématiser le plus possible l'entrée dans ces thématiques.
- L'UE intègre une importante activité de résolution de problème : temps de recherche, travail de techniques de recherche, résolution partielle, communications des résultats, etc.

Objectifs

- Revisiter les contenus de mathématiques de licence de façon transversale.
- Activité de résolution de problème : recherche et communication.

Pré-requis nécessaires

Premier semestre de L3.

Pré-requis recommandés

L2 maths.