

M2 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

(resp : stephane.baseilhac@umontpellier.fr)

PROGRAMME 2022 - 2023

Premier semestre – 3 cours fondamentaux + séminaire :

Géométrie algébrique (30h) – Sylvain Brochard

Le programme couvrira notamment les notions suivantes : Variétés affines, variétés projectives, morphismes, applications rationnelles, éclatements, lissité, espace tangent de Zariski.

Topologie Algébrique (30h) – Sylvain Maillot

Le programme couvrira notamment les notions suivantes : groupe fondamental, théorème de Seifert-Van Kampen, revêtements (classification), premiers pas en homologie.

Géométrie Différentielle (30h) – Moulay Tahar Benameur

Le programme couvrira notamment les notions suivantes : variétés différentielles, fibrés vectoriels, fibré tangent, champs de vecteurs, flots, points critiques, formes différentielles, cohomologie de De Rham.

UE Séminaire

Vous devrez préparer un exposé d'environ 25 minutes sur un sujet mathématique, que vous présenterez à vos collègues étudiants du M2. Le sujet sera proposé par un enseignant-chercheur.

Deuxième semestre – 2 cours spécialisés + mémoire de recherche :

Inégalités en géométrie (30h) – Constantin Vernicos

L'histoire de la fondation de la ville de Carthage par la reine Didon raconte que fraîchement débarquée sur les côtes de ce qui deviendra la Tunisie, elle demanda une terre d'asile aux autochtones. Par dérision, ils lui proposèrent "autant de terres qu'elle pourrait en faire tenir dans une peau d'un boeuf". À l'aide de cette peau elle fabriqua une longue corde et « encercla » un vaste terrain où Carthage fut bâti.

Le pendant mathématique de ce mythe est de savoir si effectivement Didon a bien choisi le plus vaste terrain. Autrement dit étant donnée une corde quelle est la surface la plus grande que l'on peut entourer et quelle forme « entourons-nous » ?

Ce problème dont la réponse est bien connue donne naissance à la première inégalité dite « isopérimétrique » : à périmètre égal, c'est le cercle qui entoure la plus grande surface.

Depuis, en géométrie différentielle (mais pas seulement), de nombreuses questions se résument à se donner une fonction sur une variété (on parle d'invariant) ou une partie de celle-ci, et à trouver le maximum que cette fonction atteint sous certaines contraintes: par exemple borne sur la courbure, volume...

Première partie: Espace euclidien.

En commençant par les inégalités classiques du plan euclidien (isopérimétrique, isodiamétrique, Brunn-Minkowski, Mahler, Blaschke-Santaló) dont nous proposerons des démonstrations spécifiques à la dimension 2, nous passerons ensuite aux dimensions supérieures.

Seconde partie: Variétés.

Nous verrons comment certaines des inégalités de la première partie se généralisent dans ce cadre. Notamment l'inégalité isopérimétrique, dont une partie est encore une voie de recherche active. Nous parlerons aussi d'autres inégalités qui apparaissent (croissance du volume par exemple). Nous verrons également que certaines des inégalités de la première partie peuvent être un point de départ de définition de notion de courbures récentes.

Classification des surfaces algébriques (30h) – Michele Bolognesi

Ce cours est une introduction à la théorie des surfaces algébriques complexes. Nous allons commencer par introduire des outils de base, comme les diviseurs, les fibrés en droites et le théorème de Riemann-Roch, et quelques notions de théorie de Hodge. Ensuite nous allons définir et étudier certains invariants discrets (caractéristique d'Euler, irrégularité, genre, nombres de Betti, dimension de Kodaira), qui vont nous permettre d'aborder la classification des surfaces. Nous allons donner des exemples intéressants de surfaces algébriques pour chaque dimension de Kodaira: négative, zéro, un et type général.

Références:

Rick Miranda, An overview of Algebraic Surfaces
Arnaud Beauville: Surfaces Algébriques

Mémoire de M2

Vous travaillerez pendant plusieurs mois sur un sujet avancé de recherche, encadré par un enseignant/chercheur, et devrez produire un mémoire de quelques dizaines de pages. Vous présenterez ce mémoire devant une commission d'enseignants/chercheurs de l'IMAG.