M2 MATHEMATIQUES FONDAMENTALES
(Responsable : stephane.baseilhac@umontpellier.fr)

PROGRAMME 2024 - 2025

Premier semestre – 3 cours fondamentaux + UE séminaire :

Géométrie algébrique (30h) – Sylvain Brochard
Topologie Algébrique (30h) – Sylvain Maillot
Géométrie Différentielle (30h) – Moulay Benameur

UE Séminaire **:** vous devrez préparer un exposé d’environ 25 minutes sur un sujet mathématique proposé par un membre de l’IMAG, que vous présenterez à vos collègues étudiants du M2.

Deuxième semestre – 2 cours spécialisés + un mémoire de recherche :

(1) *Surfaces de Riemann* (30h) – Joao Pedro Dos Santos

Programme :

1. Rappels d’analyse complexe : fonctions holomorphes, équations de Cauchy-Riemann, fonctions méromorphes, ordre d’un pôle, théorème d’extension de Riemann, etc.
2. Définitions des surfaces de Riemann. La sphère de Riemann, les tores E_Λ.
3. Fonctions holomorphes et méromorphes. Théorie de Weierstrass.
4. Vecteurs tangents et formes différentielles. Les fibrés tangent et cotangent : formes holomorphes.
5. Fibrés vectoriels. Le lien fibrés en droites $\leftrightarrow$ diviseurs.
6. Revêtements et homotopies. Continuation analytique et faisceaux.
7. Exemples : Surfaces modulaires.
8. Faisceaux et cohomologie de Cech.
9. Corps de fonctions et courbes algébriques.
10. Le théorème de Riemann-Roch et ses multiples implications.
11. La formule de Riemann-Hurwitz.
12. La Jacobienne et le Théorème d’Abel-Jacobi.

Références :

Bo] J.-B. Bost, Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties. From number theory to physics (Les Houches, 1989), 64--211.Springer-Verlag, Berlin, 1992

[Fo] O. Forster, Lectures on Riemann surfaces. Grad. Texts in Math. 81, Springer-Verlag, New York, 1991

[Gu] R. Gunning, Lectures on Riemann surfaces. Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966

[Ki] F. C. Kirwan, Complex algebraic curves. London Math. Soc. Stud. Texts 23, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Re] E. Reyssat, Quelques aspects des surfaces de Riemann. Progr. Math. 77, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989.

(2) *Surfaces de translation* (30h) — Daniel Massart

Dans le plan euclidien, que vous imaginez fait de papier, tracez un polygone (pas forcément convexe ni même connexe) dont les côtés sont deux à deux parallèles et de même longueur. Découpez-le, et recollez par une translation chaque côté à un côté parallèle et de même longueur (vous ne pouvez pas faire ça dans R^3 sans froisser le papier, mais imaginez que vous avez plus de dimensions à votre disposition, ou pensez-y simplement comme à un espace quotient abstrait). Vous obtenez une variété différentiable de dimension 2. De plus, avec nos hypothèses sur les recollements, cette surface hérite de la géométrie euclidienne du plan (sauf peut-être aux points correspondants aux sommets du polygone). On peut donc y mesurer des distances, ce qui en fait une variété riemannienne (après avoir enlevé les sommets si besoin est), et des angles, ce qui en fait une surface de Riemann.

Un exemple est de prendre un polygone régulier à 2n côtés, et de recoller chaque côté au côté opposé. On obtient une surface de genre E(n/2), E étant la partie entière. On peut aussi prendre du papier quadrillé, et tracer un polygone dont les sommets sont des noeuds du quadrillage, et dont les côtés sont des lignes du quadrillage ; une surface obtenue à partir d'un tel polygone est dite "à petits carreaux", il y en a de tous genres.

On peut ensuite déformer le polygone (tout en respectant la condition de côtés deux à deux parallèles et de même longueur) ; on obtient alors une surface de même genre, mais dont la structure (métrique ou complexe) est différente. En termes savants, les côtés du polygone (vus comme nombres complexes) donnent des coordonnées locales sur l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre fixé. En tant qu'ensemble, l'espace des modules de genre g est juste l'ensemble de toutes les surfaces de Riemann de genre g, mais cet ensemble admet un tas de structures intéressantes : il possède une métrique, une structure complexe, et c'est même une variété algébrique.

Un exemple de déformation est de faire agir une matrice 2x2 inversible ; autrement dit, on a une action de $GL_2(R)$ sur l'ensemble des surfaces de translation. Dans ce cours nous nous intéresserons particulièrement à certaines surfaces de translation très symétriques, appelées surfaces de Veech, dont l'orbite sous $GL_2(R)$ est fermée dans l'espace des modules. Nous verrons que ces orbites sont bien mieux que fermées : ce sont des courbes complexes totalement géodésiques.

Le cours suivra les grandes lignes de https://imag.umontpellier.fr/~massart/survey.pdf. On pourra aussi consulter avec profit le survey d'A. Zorich (https://arxiv.org/abs/math/0609392).

Mémoire de recherche :

Vous travaillerez sur un sujet encadré par un enseignant/chercheur, et devrez produire un mémoire de quelques dizaines de pages. Vous présenterez ce mémoire devant une commission d'enseignants/chercheurs de l'IMAG.