M2 MATHEMATIQUES FONDAMENTALES
(Responsable : stephane.baseilhac@umontpellier.fr)

PROGRAMME 2025 - 2026

Premier semestre – 3 cours fondamentaux + UE séminaire :

1) Géométrie algébrique (30h) – Sylvain Brochard

Programme : Variétés affines, variétés projectives, morphismes, applications rationnelles, éclatements, lissité, espace tangent de Zariski.

Référence principale: Daniel Perrin, *Géométrie algébrique. Une introduction.* (Disponible en ligne)

---

2) Topologie Algébrique (30h) – Sylvain Maillot

Programme : groupe fondamental et revêtements (classification), homologie.

Référence : chapitres I et II de Allen Hatcher, *Algebraic Topology* (Disponible en ligne)

---

3) Géométrie Différentielle (30h) – Moulay Tahar Benameur

Programme :
- Algèbre extérieure et complexe de de Rham d'un ouvert de R^n.
- Variétés différentielles, fibré tangent, cotangent et leurs puissances extérieures, champs de vecteurs et formes différentielles.
- Exemples standards de variétés différentielles: sous-variétés de R^n, espaces projectifs, actions totalement discontinues et variétés quotients. Au moins un exemple non séparé.
- Cohomologie de De Rham des variétés. Mayer-Vietoris et calculs classiques (sphères, tores, espaces projectifs...). Lemme de Poincaré et invariance par homotopie. Cas des variétés à bord et formule de Stokes.
- Fibrés vectoriels, sections, théorème de Serre-Swan, invariance des classes d'isomorphisme par homotopie.

Référence : premier chapitre du livre de Bott & Tu, *Differential forms in algebraic topology*

UE Séminaire

Vous devrez préparer un exposé d'environ 25 minutes sur un sujet mathématique, que vous présenterez à vos collègues étudiants du M2. Le sujet sera proposé par un enseignant-chercheur.

Deuxième semestre – 2 cours spécialisés + un mémoire de recherche :

(1) *Variétés toriques* (30h) – Thibaut Delcroix

L'objectif du cours sera d'introduire les bases de la géométrie algébrique des variétés toriques, qui forment une classe riche de variétés dont l'étude se ramène, souvent, à de la géométrie convexe voire combinatoire. Après avoir introduit les outils fondamentaux pour cette étude (correspondances variété torique affine - cône rationnel polyédral, variété torique - éventail, polytopes - fibrés en droites amples,...), on pourra commencer l'étude de questions proches de la recherche actuelles, en caractérisant les variétés toriques Fano, puis en introduisant au choix la K-stabilité des variétés toriques projectives, ou la symétrie miroir de Batyrev pour les hypersurfaces anticanoniques dans les variétés toriques Fano.

Plan:
1) Variétés toriques affines, cones et semigroupes
2) Variétés toriques et éventails
3) Diviseurs, Fibrés en droites et polytopes
4) Variétés toriques Fano et développements

Référence principale : Cox, Little, Schenck, Toric Varieties, Graduate Studies in Mathematics

(2) *Structures géométriques sur les variétés de petite dimension* (30h) — Sylvain Maillot

Depuis W. Thurston on définit une géométrie comme un couple (X,G) où X est une variété simplement connexe et G un groupe de Lie agissant transitivement sur X. Cela permet l'étude géométrique des variétés obtenues comme quotients de X par un sous-groupe discret Γ de G agissant librement sur X.

Dans ce cours on présentera les géométries de dimension <= 4. Si le temps le permet on abordera les orbifolds, des objets qui généralisent les variétés et permettent de traiter le cas où l'action de Γ peut avoir des points fixes.

Mémoire de recherche :

Vous travaillerez sur un sujet encadré par un enseignant/chercheur, et devrez produire un mémoire de quelques dizaines de pages. Vous présenterez ce mémoire devant une commission d'enseignants/chercheurs de l'IMAG.